

**ZHAW School of Management and Law**

**MSc in Banking & Finance**

Master Thesis

***Systematische Untersuchung quantitativer Finanzmarktgrößen auf Zusammenhänge zum Benfordschen Gesetz***

Eingereicht bei:

Prof. Dr. Jan-Alexander Posth

Prof. Dr. Peter Schwendner

Vorgelegt durch:

Simon J. Torriani

Winterthur, 15. Juni 2023

## **Selbstständigkeitserklärung**

„Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig, ohne Mithilfe Dritter und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen verfasst habe und dass ich ohne schriftliche Zustimmung der Studiengangleitung keine Kopien dieser Arbeit an Dritte aushändigen werde.“

Gleichzeitig werden sämtliche Rechte am Werk an die Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften (ZHAW) abgetreten. Das Recht auf Nennung der Urheberschaft bleibt davon unberührt.

Name / Vorname Student

TORRIANI SIMON J.

Unterschrift Student

A solid black rectangular box used to redact the student's signature.

---

## Management Summary

Das Benfordsche Gesetz befasst sich mit der Verteilung von Ziffern, insbesondere wird die erste Ziffer bestimmter Zahlen betrachtet. Der amerikanische Physiker Frank Benford entdeckte, dass in vielen Datensätzen die jeweils erste Ziffer der in den Datensätzen enthaltenen Zahlen nicht, wie man annehmen könnte, zufällig ist; auch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Ziffer eine bestimmte Zahl zwischen 1 und 9 ist, nicht gleichverteilt. Die Auftrittswahrscheinlichkeit einer Ziffer als *erste Ziffer* einer Zahl folgt einer Verteilung, die mittels einer Gleichung, die Benford entwickelte, berechnet werden kann: Dem Benfordschen Gesetz.

Das Benfordsche Gesetz findet in der Praxis insbesondere bei der Betrugserkennung eingesetzt, da Daten, die von Menschen manipuliert wurden, dieser erwarteten Verteilung der ersten Ziffern in der Regel nicht folgen. Untersucht wurden bisher unter anderem auch manipuliertes Bild- und Videomaterial (Bonettini, 2020). Im Kontext von Aktien- und Finanzmärkten wurde bisher nur sehr wenig Forschung bezüglich des Benfordschen Gesetzes dahingehend betrieben, ob das Gesetz in einer Form Anwendung finden kann. Einige wenige Studien haben gezeigt, dass bestimmte Grössen wie stetige tägliche Renditen über sehr lange Zeiträume dem Benfordschen Gesetz approximativ folgen.

An dieser Stelle setzt die vorliegende Arbeit an. Es wird untersucht, ob und welche Finanzmarktgrössen Zusammenhänge zum Benfordschen Gesetz aufweisen, insbesondere wird dabei auf Aktien- und Indexkursveränderungen fokussiert; es wird also überprüft, ob diese der Benfordschen Verteilung folgen. Ausserdem wird analysiert, ob Korrelationen zwischen der Güte der Approximation dieser Kursveränderungen zu anderen Finanzmarktgrössen wie Volatilität nachgewiesen werden können. Zu diesem Zweck werden in dieser Arbeit über verschiedene Zeitreihen eine grosse Anzahl von relativen Tageskursveränderungen unterschiedlicher Aktien und Indizes berechnet und die Verteilung respektive Häufigkeit deren erster Ziffern in unterschiedlichen Verfahren auf ihre Konformität zum Benfordschen Gesetz analysiert. Eine besondere Herausforderung in diesem Kontext ist die Beurteilung der Approximationsgüte einer Verteilung. Erkenntnisse aus der Literatur führen in dieser Arbeit zur Anwendung der mittleren absoluten Abweichung, deren Vorteil ihre grössenagnostische Natur ist, während die Reliabilität anderer statistischer Tests stark von der Grösse des Datensatzes abhängen.

Aus der Arbeit geht hervor, dass durchaus Zusammenhänge zwischen dem Benfordschen Gesetz und Aktien- und Indexkursen beobachtet werden können. Aktien- und Indexkursveränderungen können die Benfordsche Verteilung annehmen, insbesondere kann gezeigt werden, dass die Grösse des Datensatzes signifikant mit der Approximationsgüte einer Verteilung korreliert. Des Weiteren konnten Zusammenhänge zwischen Volatilität und Approximationsgüte dargelegt werden.

Aufgrund des bisherigen Forschungsstands bearbeitet diese Thesis ein weitgehend unerforschtes Teilgebiet des Benfordschen Gesetzes. Daher ist die Interpretation bestimmter Resultate bisweilen nicht ganz trivial – weitere, vertiefte Untersuchungen sind nötig, um das Thema besser zu verstehen oder ökonomische Implikationen abzuleiten.

# Inhaltsverzeichnis

1	Ausgangslage.....	1
1.1	Fragestellung und Gliederung.....	1
1.2	Abgrenzungen.....	2
1.3	Methodisches Vorgehen .....	2
1.3.1	Datengrundlage und Vorgehen.....	3
1.3.2	Basiswerte.....	3
1.3.3	Download, Extraktion der ersten Ziffern und Berechnung der MAD.....	3
2	Einleitung .....	5
2.1	Abgegriffene Logarithmentafeln .....	5
2.2	Das Mantissengesetz.....	7
2.3	Benfords Entdeckung.....	8
2.3.1	Herleitung aus dem Mantissengesetz .....	10
2.4	Skaleninvarianz.....	11
2.4.1	Skaleninvariante Messwerte, gleichverteilte Logarithmen .....	12
2.5	Natürliche Zahlen .....	14
2.5.1	Unter- und Obergrenzen .....	14
2.6	Beweise.....	16
2.7	Konformitätsprüfung .....	16
2.7.1	Chi-Quadrat .....	17
2.7.2	Z-Test .....	19
2.7.3	Kolmogorov-Smirnoff-Test.....	20
2.7.4	Mittlere absolute Abweichung (MAD).....	21
2.8	Voraussetzungen und Gültigkeitsbereich .....	22
2.9	Literaturreview.....	24
2.9.1	Konformität im S&P 500 und im Dow Jones.....	24
2.9.2	Benford und Berichtsaision .....	26

2.9.3	Indizes, Aktien und Volatilitätsmodell.....	26
3	Empirischer Teil.....	29
3.1	Resultate.....	31
3.1.1	Euro STOXX 50.....	32
3.1.2	S&P 500.....	38
3.1.3	Rollierende mittlere absolute Abweichung.....	42
3.1.4	Gleitende mittlere absolute Abweichungen.....	44
3.1.5	Zufallsstudie.....	47
3.1.5.1	Zufallsstudie: Resultate Euro STOXX 50.....	51
3.1.5.2	Zufallsstudie: Resultate S&P 500.....	54
3.1.5.3	Selection Bias.....	55
3.1.6	Andere Indizes und Intervalle.....	56
3.1.6.1	Internationale Indizes über 23 Jahre.....	56
3.1.6.2	Amerikanische Indizes, wöchentliche Daten ab 1930.....	59
3.1.7	Volatilität und Verteilung der Tageskursveränderungen.....	59
3.1.8	Exkurs: Andere Grössen.....	65
4	Diskussion und kritische Würdigung.....	66
4.1	Ausblick.....	69
5	Anhang.....	74

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Datendownload aus Bloomberg .....	3
Abbildung 2: Ausschnitt einer Logarithmentafel .....	6
Abbildung 3: Heuristische Herleitung des Mantissengesetzes auf einem Kreis .....	8
Abbildung 4: Erste Ziffern der Fläche von Flüssen .....	9
Abbildung 5: Keine Skaleninvarianz.....	12
Abbildung 6: Dichte von $\log(M)$ auf $[0;1[$ .....	13
Abbildung 7: $P_n(1)$ für $n= 100'000$ , logarithmierte x-Achse .....	15
Abbildung 8: $P_n(1)$ für $n=100'000$ .....	15
Abbildung 9: Verläufe von $P_n(1)$ und $P_n(9)$ .....	16
Abbildung 10: Chi-Quadrat liefert irreführende Resultate.....	18
Abbildung 11: Z-Test mit Signifikanzgrenzen.....	20
Abbildung 12: MAD-Scoring.....	22
Abbildung 13: Auftrittshäufigkeit der Ziffern für stetige Returns .....	25
Abbildung 14: PC und PCV verschiedener Indizes .....	27
Abbildung 15: Anteile konformer Aktien (PCV) in verschiedenen Intervallen.....	28
Abbildung 16: Beobachtungszeiträume.....	31
Abbildung 17: Verteilung der ersten Ziffern von Tageskursveränderungen einiger Aktien und Benfordsche Erwartung .....	32
Abbildung 18: Verteilung der ersten Ziffern der täglichen Kursveränderungen des Index über verschiedene Intervalle im Vergleich zur Benfordschen Verteilung .....	33
Abbildung 19: Mittelwerte und Standardabweichung der MAD über verschiedene Intervalle, Euro STOXX 50.....	34
Abbildung 20: Abweichung der erwarteten Ziffernhäufigkeit zur tatsächlichen, alle Intervalle.....	35
Abbildung 21: Mittlere Abweichung der Häufigkeiten pro Ziffer, Euro STOXX 50....	36
Abbildung 22: Standardabweichung der Abweichungen .....	37
Abbildung 23: Vergleich der mittleren Abweichungen .....	38
Abbildung 24: Mittelwerte und Standardabweichungen der MAD über verschiedene Zeiträume, S&P 500 .....	39
Abbildung 25: Mittlere Abweichung der Häufigkeiten pro Ziffer, S&P 500 .....	40
Abbildung 26: Rollierende 1y-MAD einiger Basiswerte und Mittelwert .....	42
Abbildung 27: Rollierende 1y-MAD einiger Basiswerte und Mittelwert .....	43

Abbildung 28: Mittelwerte der rollierenden 1y-MAD aller Basiswerte.....	43
Abbildung 29: Gleitender MAD und Anzahl Einträge zur Konformität am Beispiel von Kursdaten des Euro STOXX 50 Index .....	46
Abbildung 30: Verteilung der Konformitätsanforderungen der Basiswerte .....	47
Abbildung 31: Beispiel für Stichprobe.....	48
Abbildung 32: Zufallsstudie und reale Daten, Euro STOXX.....	52
Abbildung 33: Ränge der Approximationsgüten für n, sortiert nach durchschnittlichem Rang.....	53
Abbildung 34: Vergleich zwischen den besten und den schlechtesten Basiswerten aus der Studie anhand ihrer realen 10y-MAD .....	53
Abbildung 35: Ränge der Approximationsgüten für n, sortiert nach mittlerem Rang ...	54
Abbildung 36: Zufallsstudie gegen Überprüfung.....	55
Abbildung 37: Durchschnittliche MAD-Scores der Indizes in der Zufallsstudie .....	57
Abbildung 38: Ränge der Approximationsgüten für n, sortiert nach mittlerem Rang ...	58
Abbildung 39: Verteilung der MAD über den gesamten Datensatz (2000 - 2023).....	58
Abbildung 40: Verteilung der ersten Ziffern der Tageskursveränderungen nach Intervallen.....	60
Abbildung 41: Häufigkeit der Tagesveränderungen in Intervallen, kategorisiert nach Volatilität.....	61
Abbildung 42: Isoliertes Intervall $0.x\%$ .....	62
Abbildung 43: Isoliertes Intervall $x.0\%$ .....	62
Abbildung 44: Konformitätsränge gegen Volatilität.....	63
Abbildung 45: Rollierende MAD und VIX.....	64
Abbildung 46: Kein Zusammenhang: Konformitätsränge und durchschnittliche jährliche Performance.....	65
Abbildung 47: Konformitätsränge und Sektoren.....	66
Abbildung 49: Benfords Untersuchung.....	74
Abbildung 50: Konformitätsmatrix Euro STOXX .....	89
Abbildung 51: Konformität und Verteilung der Ziffern, wöchentliche Daten.....	89
Abbildung 52: Anteil konformer relativer und absoluter Tageskursveränderungen.....	89
Abbildung 53: Anteil konformer Tageskursveränderungen der 30-tägigen Volatilität .	89



## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Anteil konformer Basiswerte in Intervallen, Euro STOXX 50 .....	33
Tabelle 2: Links: Mittlere Abweichung der tatsächlichen Häufigkeit jeder Ziffer zu ihrer erwarteten Häufigkeit. Rechts: Standardabweichung der Abweichungen .....	37
Tabelle 3: Anteil konformer Basiswerte in Intervallen, S&P 500.....	39
Tabelle 4: Links: Mittlere Abweichung der tatsächlichen Häufigkeit jeder Ziffer zu ihrer erwarteten Häufigkeit. Rechts: Standardabweichung der Abweichungen, beide S&P 500 .....	40
Tabelle 5: Gleitender MAD (1) .....	44
Tabelle 6: Gleitender MAD (2) .....	44
Tabelle 7: Indizes für zufällige Tageskursveränderungen.....	56
Tabelle 8: Basiswerte für empirische Untersuchung.....	88

## Abkürzungsverzeichnis

1y .....	<i>1 Jahr</i>
cet. par. ....	<i>ceteris paribus</i>
d.h. ....	<i>das heisst</i>
MAD .....	<i>Mean Absolute Deviation</i>
mod .....	<i>Modulo</i>
S&P 500 .....	<i>Standard &amp; Poor's 500 Index</i>
vgl. ....	<i>vergleiche</i>
YTM .....	<i>Yield to Maturity</i>

# 1 Ausgangslage

Das Benfordsche Gesetz beschäftigt sich mit der Frage nach der natürlichen Verteilung des Auftretens von Ziffern, wobei insbesondere den jeweils ersten Ziffern einer Zahl besondere Beachtung geschenkt wird. In der Arbeit «The Law of Anomalous Numbers» untersuchte der Physiker Frank Benford (1937) die Verteilung der ersten neun natürlichen Zahlen als erste Ziffern einer Vielzahl von Zahlen innerhalb unterschiedlicher Datensätze und kam zum Schluss, dass die ersten Ziffern der betrachteten Zahlen unter Anwendung einiger Prämissen und Voraussetzungen einer beobachtbaren Verteilung folgen. Es gelang ihm, das beobachtete Phänomen in einer Gleichung zusammenzufassen, welche die zu erwartende Verteilung definiert. Das Benfordsche Gesetz wird in der Praxis insbesondere zur Erkennung von Betrugsversuchen bei der Bilanzerstellung (und generell bei Datenbetrug) eingesetzt, prominentes Beispiel dafür ist der Enron-Skandal im Jahr 2001 (Tilden & Janes, 2015). Literaturrecherchen zeigen jedoch, dass neben einigen wenigen Arbeiten bisher nur wenig Empirie zur Anwendung des Benfordschen Gesetz im Kontext von Finanz- und insbesondere Aktienmärkten besteht.

## 1.1 Fragestellung und Gliederung

In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob und welche Zusammenhänge zwischen bestimmten Grössen aus Finanz- und Aktienmärkten und dem Benfordschen Verteilungsgesetz bestehen. Zu diesem Zweck werden in den ersten beiden Abschnitten dieser Arbeit Rahmenbedingungen geschaffen; es werden

- eine Einführung in die Theorie formuliert, welche auch das dem Benfordschen Gesetz zugrundeliegenden Mantissengesetz beleuchtet,
- das Konzept der Skaleninvarianz erläutert,
- die Bedingungen an zu untersuchende Datensätze formuliert
- sowie die Problemstellung der Signifikanzmessung bei der Beurteilung der Approximationsgüte betrachtet.

Im nächsten Teil der Arbeit wird die bestehende Literatur und damit der Stand der Forschung im Kontext erläutert und zusammengefasst. Im empirischen Teil der Arbeit werden Erkenntnisse aus den ersten Teilen der Arbeit auf Aktienmärkte angewandt, es soll

überprüft werden, ob statistisch signifikante Zusammenhänge zwischen der Benford-schen Verteilung und unterschiedlichen Grössen aus den untersuchten Märkten festgestellt werden können. Die allgemeine Fragestellung kann wie folgt zusammengefasst werden:

*«Bestehen zwischen dem Benfordschen Gesetz und bestimmten Finanzmarktgrössen statistische Zusammenhänge?»*

Dieser Teil der Arbeit wird iterativ durchgeführt, es kann davon ausgegangen werden, dass die während der Durchführung dieser Analysen gewonnenen Erkenntnisse (ebenso jene aus der Literaturrecherche) den Fokus der Arbeit beeinflussen werden.

## **1.2 Abgrenzungen**

Diese Arbeit beschränkt sich auf Aktienmärkte, betrachtet also neben den Konstituenten des Euro STOXX 50 und des S&P 500 sowie Daten der beiden Indizes selbst keine weiteren Assetklassen. Hinsichtlich des Benfordschen Gesetzes beschränkt sich diese Arbeit auf das "*first digit law*", betrachtet also jeweils nur die erste Ziffer einer jeden zu untersuchenden Zahl, nicht jedoch die weiteren ("*n-digit*"), es werden dabei insbesondere relative Tageskurse untersucht. Es werden keine elementaren Beweise zur Funktionsweise des Benfordschen Gesetzes dargelegt, es wird jedoch auf die mathematische Grundlage eingegangen. Zur Signifikanzmessung beziehungsweise Beurteilung von Konformitäten wird die Mean Absolute Deviation und ein dazu passendes Scoring-Modell aus der Literatur angewandt. Dies wird im Abschnitt zur Konformitätsmessung begründet.

## **1.3 Methodisches Vorgehen**

Im Rahmen dieser Arbeit wird unter Anwendung verschiedener Verfahren untersucht, ob zwischen bestimmten Finanzmarktgrössen Zusammenhänge bestehen. Im folgenden Teil wird dargelegt, welche Daten dabei zur Verwendung kommen und wie diese Verarbeitet werden.

### 1.3.1 Datengrundlage und Vorgehen

Für die folgenden Teile der Arbeit wurden, wo nicht anders spezifiziert, Bloomberg-Daten verwendet. Die empirischen Überprüfungen und Analysen wurden in Microsoft Excel durchgeführt.

### 1.3.2 Basiswerte

Für den empirischen Teil in Betracht gezogen werden verschiedene Aktien und Aktienindizes, insbesondere der Euro STOXX 50 und der S&P 500 sowie alle deren jeweiligen aktuellen Konstituenten. Ebenfalls berücksichtigt werden einige weitere Aktienindizes aus verschiedenen geografischen Regionen, welche unterschiedliche Charakteristika aufweisen. Unter "Basiswerte" sind jeweils die zu untersuchenden Aktien und Indizes zu verstehen (es sind jeweils Aktien *und* Indizes gemeint, daher die Verwendung des eigentlich im Derivategeschäft anzutreffenden Begriffs).

### 1.3.3 Download, Extraktion der ersten Ziffern und Berechnung der MAD

Allen folgenden Abschnitten liegt ein Download verschiedener Kursdaten aus Bloomberg zugrunde, welche jeweils in einem Arbeitsblatt "Prices" gespeichert werden. Die folgende Zeile generiert für einen gewählten Basiswerte eine Zelle mit dem jeweils letzten Preis in täglicher Periodizität zwischen einem Start- und einem Enddatum:

Download eines einzelnen Preisdatenpunkts	Resultat
=bdh("BASISWERT";"PX_LAST";"STARTDATUM";"ENDDATUM")	2711.74

Startdatum	30.04.2013	
Enddatum	20.05.2013	
	SX5E Index	ABI BB Equity
	Last Price	Last Price
Dates	PX_LAST	PX_LAST
30.04.2013	2712.00	72.25
01.05.2013	2711.74	72.25
02.05.2013	2718.90	72.85
03.05.2013	2763.68	73.10
06.05.2013	2750.52	73.39
07.05.2013	2769.08	73.38
08.05.2013	2784.62	74.28
09.05.2013	2773.16	73.88
10.05.2013	2785.24	74.46
13.05.2013	2777.39	74.95
14.05.2013	2795.63	75.82
15.05.2013	2809.58	75.89

Abbildung 1: Datendownload aus Bloomberg (Bloomberg-Terminal) (eigene Darstellung)

In einem weiteren Arbeitsblatt ("1st digit") werden die Preisdaten in die relevante Kursänderung – hier eine relative Tageskursveränderung – übersetzt. Da Nullstellen und Vorzeichen im Kontext des Benfordschen Gesetz nicht von Relevanz sind, sondern die erste Ziffer von links, die nicht Null ist, Objekt des Interesses ist, wird die Kursveränderung mit einem grossen Faktor multipliziert. Dadurch werden allfällige Nullstellen eliminiert, die erste Ziffer vor dem Komma ist positiv und nicht Null. Die erste Ziffer wird damit isolierbar:

Vor Extraktion	entspricht	Resultat
=(Prices!B9-Prices!B8)/Prices!B8	$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}}$	0.2640%

Nach Extraktion	Resultat
=LINKS(ABS((Prices!B9-Prices!B8)/Prices!B8)*1000000;1)	2

Im nächsten Arbeitsblatt, hier "Count" genannt, wird für den betrachteten Zeitraum für jede Ziffer {1,2, ... 9} ihre absolute Häufigkeit gezählt und durch die Anzahl relevanter Datenpunkte innerhalb dieses Zeitraums geteilt, um ihre relative Frequenz zu berechnen. Datenpunkte sind dann relevant, wenn sie nicht Null sind (also nicht keine Kursveränderung zustande kam). Für jede Ziffer:

Relative Häufigkeit einer Ziffer, hier Ziffer 1	Resultat
=(ZÄHLENWENNS('1st digit'!\$A:\$A;">="&\$A\$2;'1st digit'!\$A:\$A;"<="&\$A\$3;'1st digit'!B:B;\$A5))/B\$16	32.07%

Zu interpretieren ist das obige Resultat als relative Häufigkeit, hier würde das bedeuten, dass im untersuchten Datensatz (also jeweils ein Basiswert und ein Intervall) 32.07% der Tageskursveränderungen in % mit der Ziffer 1 beginnen. Hier sei nochmals erwähnt, dass das nicht unbedingt bedeutet, dass sich diese Tageskursveränderungen in der Grössenordnung 1.x% bewegen, auch 0.01% oder 10.5% beginnen im Kontext des Benford-schen Gesetzes mit der Ziffer 1 (vgl. Abschnitt 2.3).

Im nächsten Schritt wird von jeder beobachteten Häufigkeit die durch das Benfordsche Gesetz erwartete Häufigkeit abgezogen, das Resultat wird absolut betrachtet. Für jede Ziffer und jeden Basiswert:

<b>Absolute Abweichung der Häufigkeit einer Ziffer</b>	<b>Resultat</b>
=ABS(Count!B5-'Benford''s Distribution'!\$B\$1)	0.01972

Obiges Resultat würde bedeuten, dass die Häufigkeit der untersuchten Ziffer um 1.9% von der erwarteten Häufigkeit abweicht, ob sie jedoch zu oft oder zu selten auftritt, kann hier nicht beurteilt werden.

Im vorerst letzten Schritt wird der Mittelwert dieser absoluten Abweichungen berechnet, um den MAD ("mean absolute deviation") zu erhalten (hier wird zur Demonstration, dass durch 9 "Kategorien" geteilt wird, die Summenfunktion verwendet, im weiteren Teil der Arbeit wird die Mittelwertfunktion eingesetzt):

<b>Mittlere absolute Abweichung</b>	<b>Resultat</b>
=SUMME(B5:B13)/9	0.0111

Diese Schritte werden für jede Ziffer jedes Basiswerts und jeden betrachteten Zeitraum wiederholt.

## **2 Einleitung**

### **2.1 Abgegriffene Logarithmentafeln**

Ende des 19. Jahrhunderts stellte der kanadische Astronom und Mathematiker Simon Newcomb bei der Arbeit mit Logarithmentafeln fest, dass nicht alle Seiten gleich stark abgenutzt waren; einige Seiten schienen öfters zur Anwendung zu kommen als andere. Vor der Verbreitung von elektronischen Rechnern wurden Bücher mit Logarithmentafeln oft verwendet, um den Zeitaufwand für komplexe Berechnungen, die Logarithmen

enthielten, zu verringern, insbesondere zur Findung des Logarithmus eines bekannten Numerus (Hungerbühler, 2007, S. 1). Um darzulegen, weshalb die ungleiche Abnutzung der Seiten dieser Logarithmentafeln schlussendlich zur Formulierung einer Gesetzmäßigkeit führen konnte, wird zunächst kurz die Funktionsweise einer solchen Logarithmentafel erläutert. Im Folgenden sei, sofern nicht anders ausgeführt, unter dem Logarithmusbegriff jeweils der dekadische, also der Zehnerlogarithmus gemeint.

x	log <sub>10</sub> x									Δ <sub>m</sub>	I 2 3			
	0	1	2	3	4	5	6	7	8		9	+		
50	.6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9	I	2	3
51	.7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8	I	2	2
52	.7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8	I	2	2
53	.7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8	I	2	2
54	.7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8	I	2	2
55	.7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8	I	2	2
56	.7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8	I	2	2
57	.7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	8	I	2	2
58	.7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	8	I	2	2
59	.7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7	I	1	2

Abbildung 2: Ausschnitt einer Logarithmentafel (<https://oldblockwriter.blogspot.com/2015/06/this-table-is-not-for-turning.html>)

Gesucht sei zum Beispiel der Logarithmus des Numerus 57.81. Bei der Suche nach einem Logarithmus eines bestimmten Numerus wird zunächst die korrespondierende Zeile in der ersten Spalte der Logarithmentafel auffindig gemacht (vgl. Abbildung 2). In der Stelle 57.8 ist in der Wert 7619 vermerkt, bei der zweiten Dezimalzahl, hier 1, der Wert 1. Durch Addition dieser beider Werte erhält der Anwendende die Mantisse (vgl. Abschnitt 2.2) des gesuchten Logarithmus, also den fraktionalen Teil des gesuchten Wertes, in diesem Falle also 7620. Durch Umformulierung des Numerus in die Exponentialdarstellung wird der Exponent zur Basis 10 offenbart, hier 1.

$$57.81 = 5.781 \times 10^1$$

Durch Kombination des Exponenten des Numerus und der gefundenen Mantisse des Logarithmus erhält der Anwendende eine Approximation an den gesuchten Logarithmus:

$$\log(57.81) \approx 1.7620$$

Unter Betrachtung der Funktionsweise einer Logarithmentafel wird also klar, was es bedeutet, wenn einzelne Seiten stärker abgenutzt waren als andere; es wurden bestimmte Numeri schlichtweg öfter nachgeschlagen als andere. Newcomb stellte fest, dass die vorderen Seiten der Bücher sichtbar beschädigter waren als die hinteren und schloss daraus, dass wohl öfters die Logarithmen von Numeri mit niedriger erster Ziffer (1, 2, 3) gesucht wurden also mit hoher erster Ziffer (7, 8, 9) (Newcomb, 1881, S. 39). Er stellte daraufhin die Vermutung auf, dass die ersten neun Ziffern also demnach nicht gleich oft als erste Ziffern einer Zahl aufträten.

## 2.2 Das Mantissengesetz

In seinem Bericht im American Journal of Mathematics formulierte Newcomb im Jahr 1881 die folgende Schlussfolgerung:

*"The law of probability of the occurrence of numbers is such that all mantissae of their logarithms are equally probable."*

Als Mantisse bezeichnet Newcomb in seiner Arbeit den fraktionalen Teil einer positiven, reellen Zahl. Es sei also definiert (Hungerbühler, 2007, S. 3):

$$\langle a \rangle := a - [a] \equiv a \pmod{1}$$

für

$$a \in \mathbb{R}^+$$

Die Mantisse eines Logarithmus entspricht also dem Logarithmus Modulo 1. Zur Veranschaulichung dieses Sachverhalts soll die obige Definition auf die Eulersche Zahl  $e$  angewandt werden:

$$e = 2,718281828 \dots$$

$$\langle e \rangle = 2.7183 - 2 = 0.7183 \equiv e \pmod{1}$$

Die auf vier Stellen gerundete Mantisse der Eulerschen Zahl beträgt nach Newcombs Definition also 0.7183. Es wird weiter festgehalten, dass per obiger Definition folgt, dass



alle Mantissen positive, rationale Zahlen eines halboffenen Intervalls zwischen 0 und 1 sind:

$$\langle a \rangle \in \mathbb{Q}^+ \text{ und } \langle a \rangle \in [0; 1[$$

Für seine Aussage, dass die Häufigkeit des Vorkommens von Zahlen so sei, dass die Mantissen ihrer Logarithmen gleichverteilt seien, liefert Newcomb keinen mathematischen Beweis, allerdings lässt sich der Sachverhalt heuristisch demonstrieren (Hungerbühler, 2007, S. 4). Betrachtet man zufällig verteilte Zahlen, in Hungerbühlers Herleitung handelt es sich um weibullverteilte Zufallszahlen, nimmt deren Logarithmus und isoliert schliesslich dessen Mantisse, verteilen sich diese Mantissen ungefähr gleichmässig auf einem Zahlenstrahl mit Intervall  $[0; 1[$  oder auf einem Kreis mit Umfang 1.

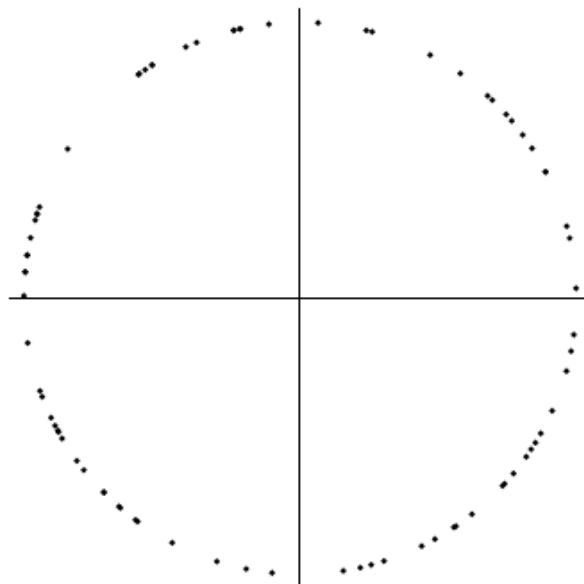


Abbildung 3: Heuristische Herleitung des Mantissengesetzes auf einem Kreis (Hungerbühler, 2007)

### 2.3 Benfords Entdeckung

Der oben erläuterte Sachverhalt bezüglich gleichverteilter Mantissen bildet die Grundlage für das Newcomb-Benfordsche Gesetz, im Folgenden nur noch Benfordsches Gesetz genannt. 1938 publizierte der amerikanische Physiker Frank Benford seine Arbeit "The Law of Anomalous Numbers" und präsentierte darin Erkenntnisse, die er bei der Untersuchung verschiedener Datensätze gewonnen hatte. Diese Datensätze bestanden aus Zahlenreihen unterschiedlicher Kategorien wie Sportresultate, Einwohnerzahlen amerikanischer

Städte oder den Flächen von Flüssen (Benford, 1938, S. 553). Dabei betrachtete Benford die jeweils ersten Ziffern (zwischen 1 und 9) dieser Zahlen und stellte fest, dass die Auftretenswahrscheinlichkeit dieser Ziffern keineswegs zufällig war und dass diese Ziffern nicht – wie intuitiv angenommen werden könnte – gleich oft auftraten. Im Gegenteil schienen die Ziffern einem ganz bestimmten Muster zu folgen; je niedriger die Ziffer, desto öfters schien sie aufzutreten (Benford, 1938, S. 551). Benford gelang es, diese Tatsache in einer Gleichung festzuhalten:

$$F_a = \log\left(\frac{a+1}{a}\right)$$

für

$$a \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

Es ergibt sich daraus eine distinkte Verteilungsregel, genannt "*Benford's first digit law*" (in dieser Arbeit wird nur die jeweils erste Ziffer betrachtet, grundsätzlich ist es aber möglich, die Wahrscheinlichkeit einer beliebigen Zahlenfolge als erste Ziffern einer Zahl zu berechnen). Die Verteilungsregel formuliert, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine bestimmte Ziffer  $a$  als erste Ziffer einer Zahl auftritt; die Ziffer 1 sollte also mit einer Wahrscheinlichkeit von 30.1%, die Ziffer 9 jedoch nur zu 4.6% auftreten. Werden nun beispielsweise jeweils die ersten Ziffern der von Benford betrachteten Flächen von Flüssen mit seinem Vorschlag zur Auftretenswahrscheinlichkeit einzelner Ziffern verglichen, ergibt sich die Verteilung in Abbildung 4.

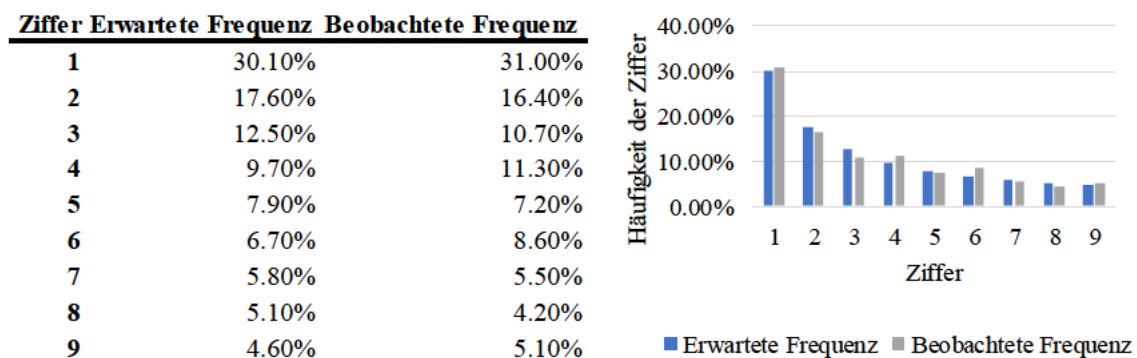


Abbildung 4: Erste Ziffern der Fläche von Flüssen (eigene Darstellung, in Anlehnung an Benford (1938))

Dabei sei festgehalten, dass als relevante Ziffer die jeweils erste Ziffer ist, die nicht Null ist; es ist also irrelevant, ob ein Fluss nun 1'000 oder nur 0.015 Meilen lang ist, von Belang

ist hier nur die Ziffer 1, unabhängig von ihrer absoluten Position: "If a decimal point or zero occurs before the first natural number it is ignored, for no attention is to be paid to magnitude other than that indicated by the first digit." (Benford, 1938, S. 552). Diese Vorgehensweise impliziert das Konzept der Skaleninvarianz, welches später erläutert wird. Zunächst soll aber Benfords Häufigkeitsgleichung basierend auf dem eingangs erläuterten Mantissengesetz hergeleitet werden.

### 2.3.1 Herleitung aus dem Mantissengesetz

Sei nun die Verteilung einer Menge zufälliger Zahlen dem erläuterten Mantissengesetz adhärent, kann mittels Definition der Mengen  $E_a$  für die Ziffern  $a \in \{1,2,3 \dots 9\}$  auf die Benfordsche Gleichung zurückgeführt und auf die im nächsten Kapitel ausgeführte Skaleninvarianz geschlossen werden. Für die Mengen  $E_a$  gelte (in Anlehnung an (Hungerbühler, 2007, S. 3)):

$$E_a := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} 10^k [a, a + 1[$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^+ : a \text{ ist führende Ziffer von } x\}$$

Jede Menge  $E_a$  strebt für  $a \in \{1,2,3 \dots 9\}$  per obiger Definition am unteren Limes gegen Null, am oberen Limes gegen unendlich. Für die Herleitung der Benfordschen Entdeckung ist ausserdem ein weiterer Sachverhalt bedeutsam; die Funktion  $\langle \log(\cdot) \rangle$ , also die Mantisse des Logarithmus gemäss Newcombs Definition, ist der Multiplikation mit dem Faktor 10 invariant, ihr Wert ändert sich also nicht. Zur Demonstration sei  $x = 28$ :

$$\log(28) \approx 1.44716 \Rightarrow \langle \log(28) \rangle \approx 0.44716$$

$$\log(10 \times 28) \approx 2.44716 \Rightarrow \langle \log(10 * 28) \rangle \approx 0.44716$$

Es folgt daraus der Schluss, dass  $\langle \log(\cdot) \rangle = \langle \log(10 \times \cdot) \rangle$ . Diese Erkenntnisse und Definitionen ermöglichen nun eine Aussage über die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Zahl  $x$  Teil einer Menge  $E_a$  ist, also mit der Ziffer  $a$  beginnt. Zu diesem Zweck ist insbesondere das Gleichverteilungsargument aus dem Mantissengesetz nötig (Hungerbühler, 2007, S. 4-5).

$$\begin{aligned}
P(x \in E_a) &= P\left(x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} 10^k [a, a + 1[ \right) \\
&= P(\langle \log(x) \rangle \in [\log(a), \log(a + 1)[)
\end{aligned}$$

Dank Gleichverteilung von  $\langle \log(x) \rangle$  im Intervall  $[0; 1[$  folgt in der letzten Zeile nun die Benfordsche Verteilungsgleichung von Seite 9:

$$\begin{aligned}
&= \log(a + 1) - \log(a) \\
&= \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)
\end{aligned}$$

## 2.4 Skaleninvarianz

Das angedeutete Konzept der Skaleninvarianz hat im Kontext des Benfordschen Gesetz einen besonderen Stellenwert; eine Verteilung ist dann Skaleninvariant, wenn eine Multiplikation der Skala um eine Konstante das System – also die bisher gültigen Regeln der Verteilung – nicht verändert. Dies gilt dann, wenn die Konstante eine positive, reelle Zahl  $\mathbb{R}^+$  ist (Humenberger, 2018, S. 172). Damit die Benfordsche Gleichung das Verteilungsgesetz definieren kann, muss ebendiese Verteilung skaleninvariant sein, darf sich also nicht verschieben oder verändern, wenn alle Datenpunkte eines Datensatzes derselben Multiplikation mit einem konstanten Faktor  $\mathbb{R}^+$  unterworfen werden. Humenberger (2008, S. 6) erklärt die Wichtigkeit der Skaleninvarianz folgendermassen:

*" Wenn es überhaupt ein Verteilungsgesetz für die erste Ziffer von Zahlen gibt, so muss dieses doch ein universelles sein, d.h. es kann doch nichts ausmachen, in welchen Einheiten man die entsprechenden Größen angibt, da Einheiten ja nicht vom Universum oder einer höheren Macht vorgegeben, sondern willkürliches Menschenwerk sind."*

Zunächst soll an einem simplen Beispiel der Gleichverteilung demonstriert werden, wann eine Skaleninvarianz eben nicht vorliegt. Zu diesem Zweck sei angenommen, dass die Ziffern  $a \in \{1, 2, 3 \dots 9\}$  in einem beliebigen Szenario mit gleicher Wahrscheinlichkeit als erste Ziffern der Datenpunkte auftraten, also mit  $P_a = \frac{1}{9} = 11.\overline{11}\%$ . Würden nun die

Werte aller Datenpunkte verdreifacht, entstünde eine asymmetrische Verteilung, die Gleichverteilung wäre damit nicht mehr gegeben:  $P_1 = \frac{3}{9} \neq P_3 = \frac{1}{9}$ . Die Gleichverteilung als Verteilungsgesetz für die Ziffern  $a \in \{1,2,3 \dots 9\}$  ist also nicht skaleninvariant.

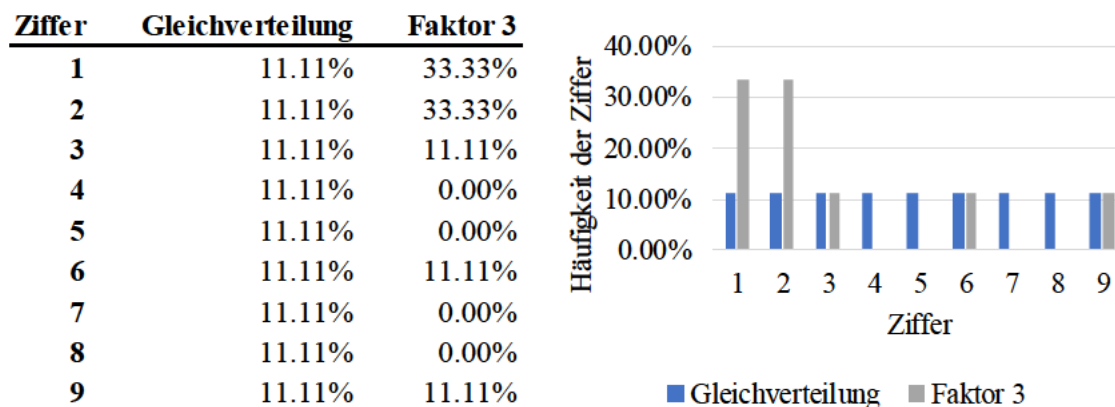


Abbildung 5: Keine Skaleninvarianz (eigene Darstellung)

Bei Betrachtung des Mantissengesetz fällt aufgrund der logarithmischen Gesetze auf, dass sich dieser Sachverhalt trotz Gleichverteilung anders verhält. Hierzu sei eine Zufallsvariable  $x > 0$ , deren Logarithmusmantisse  $\langle \log(x) \rangle$  gleichverteilt ist. Hier würde die Gleichverteilung auch für  $kx$  gelten, wenn  $k$  eine positive Konstante ist, da gemäss logarithmischer Gesetze  $\langle \log(kx) \rangle = \langle \log(x) + \log(k) \rangle$  gilt (in Anlehnung an (Hungerbühler, 2007, S. 7)).

### 2.4.1 Skaleninvariante Messwerte, gleichverteilte Logarithmen

Im folgenden Abschnitt soll begründet werden, weshalb skaleninvariante Messwerte zu gleichverteilten Logarithmen führen und Messwerte im Umkehrschluss nur skaleninvariant sein können, wenn ihre Logarithmen und damit auch ihre Mantissen gleichverteilt sind. An dieser Stelle sei jedoch angemerkt, dass der Begriff der Mantisse im Folgenden anders zu verstehen ist, als Newcomb diesen definiert hat (vgl. Abschnitt 2.2). Unter der Mantisse  $M$  ist in diesem Abschnitt jene Zahl zu verstehen, die entsteht, wenn eine Zahl  $Z \in \mathbb{R}^+$  in ihrer Exponentialschreibweise notiert wird:  $Z = \boxed{M} \times 10^n$ , wobei  $M \in [1,10[$ . Multiplikationen mit einer Konstanten  $k \in \mathbb{R}_+$  haben mit Ausnahme von 10er-Potenzen auf  $Z$  dieselben Auswirkungen wie auf  $M$ . Daraus folgt, dass, wenn das Verteilungsgesetz von  $Z$  und skaleninvariant ist (es verändert sich nicht durch die Konstante  $k$ ), auch jenes von  $M$  skaleninvariant sein muss (Humenberger, 2018, S. 173). Weiter müssen dann auch die Verteilungsgesetze von  $\log(M)$  und  $\log(M \times k)$  gleich sein

(Humenberger, 2018, S. 173). Aufgrund des logarithmischen Grundsatzes  $\log(M \times k) = \log(M) + \log(k)$  folgt, dass die Verteilungsgesetze von  $\log(M)$  und  $\log(M \times k)$  gleichbleiben, wenn eine beliebige Konstante  $k \in \mathbb{R}_+$  addiert wird (Humenberger, 2018, S. 173). Würde ein Verteilungsgesetz als Dichtefunktion betrachtet, so ist davon auszugehen, dass der konstante Funktionswert der Dichtefunktion aufgrund des Wertbereichs für  $\log(M)$  mit Länge 1 (weil  $M \in [1; 10[$ ) und des Gesamtflächeninhalts unter der Dichtefunktion von 1, ebenfalls 1 sein muss (Humenberger, 2018, S. 173).

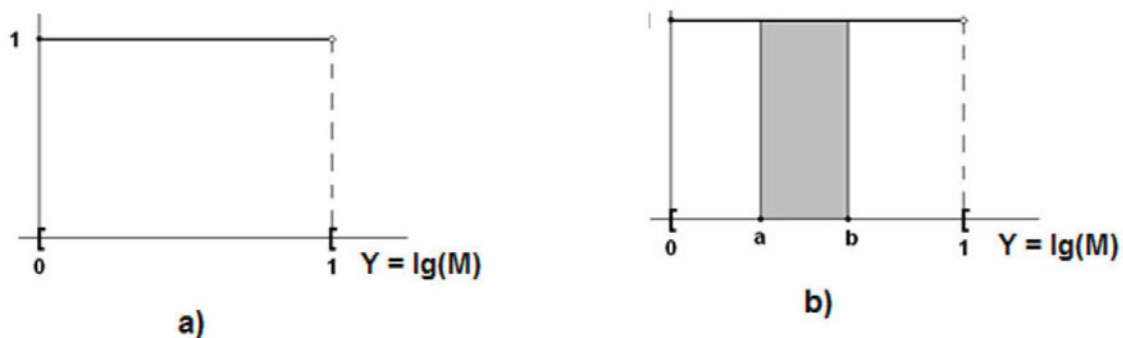


Abbildung 6: Dichte von  $\log(M)$  auf  $[0;1[$  (Humenberger, 2018, S.173)

Unter Annahme der konstanten Dichte, welche als Gleichverteilung betrachtet werden kann, wird es möglich, Frequenzen respektive Wahrscheinlichkeiten zu berechnen; für die Wahrscheinlichkeit  $P(a \leq \log(M) < b)$  lässt sich der Term zu  $1 \times (b - a)$  vereinfachen. Ist nun wiederum die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass eine Ziffer  $a$  an erster Stelle einer Zahl  $Z$  steht, kann unter Anwendung der Dichtefunktion und des Prinzips gleicher Verteilungsregeln für  $Z$  und  $M$  folgender Rückschluss gezogen werden (vgl. mit den Definitionen der Mengen  $E_a$  im Abschnitt 2.3.1) (Humenberger, 2008, S. 9):

$$\begin{aligned}
 P(Z \in E_a) &= P(\log(a) \leq M < \log(a + 1)) \\
 &= \log(a + 1) - \log(a) \\
 &= \log\left(1 + \frac{1}{a}\right)
 \end{aligned}$$

Die letzte Zeile der Gleichung entspricht hier wieder der Benfordschen Regel. Skaleninvariante Messwerte, hier  $Z$ , weisen also gleichverteilte Logarithmen auf. Im Kontext dieser Arbeit formuliert bedeutet dies, dass die logarithmierten Mantissen von Datensätzen, die Benford-verteilt und damit skaleninvariant sind, immer gleichverteilt sein müssen.

## 2.5 Natürliche Zahlen

Damit sich die Benfordsche Verteilung in einem System manifestieren kann, muss der zu untersuchende Datensatz eine Reihe von Bedingungen erfüllen, welche in Abschnitt 2.8 noch eingehender thematisiert werden. Zunächst einmal soll gezeigt werden, dass die Grundgesamtheit der im Datensatz enthaltenen Zahlen einen erheblichen Einfluss auf die Benford-Konformität der Verteilung der ersten Ziffern hat. Besteht die Grundgesamtheit aus den Zahlen  $n = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$  und man zöge daraus eine beliebig grosse Stichprobe, wäre die 1 als erste Ziffer im Vergleich zu den anderen Ziffern mit  $\frac{11}{20}$  stark überrepräsentiert und die 2 als erste Ziffer mit  $\frac{2}{20}$  immerhin noch doppelt so wahrscheinlich ist wie die restlichen, die jeweils genau einmal vorkommen. Durch diese Tatsache zeichnet es sich ab, dass die Auftrittswahrscheinlichkeit einer Ziffer als erste Ziffer einer Zahl nicht "statisch" oder immer gleich sein kann, sondern von der Natur der Grundgesamtheit abhängig ist.

### 2.5.1 Unter- und Obergrenzen

Beispielhaft sei dafür die Folge  $(P_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$  betrachtet, hier soll die Auftrittswahrscheinlichkeit der Ziffer 1 als erste Ziffer für die ersten  $n$  natürlichen Zahlen untersucht werden (Humenberger, 2018, S. 165). Für  $n = 1$  ist  $P_1(1) = 1$ , für  $n = 2$  ist  $P_2(1) = \frac{1}{2}$ , für  $n = 3$  ist  $P_3(1) = \frac{1}{3}$  und so weiter.  $P_1$  nimmt also bis  $n = 9$  ab, um danach wieder anzusteigen, das nächste lokale Maximum ist  $n = 19$ , wo  $P_{19}(1) = \frac{11}{19}$ . Anschliessend sinkt  $P_n(1)$  erneut bis  $n = 99$ , wo  $P_{99}(1) = \frac{11}{99}$  und damit wieder  $\frac{1}{9}$  ist.

Für wachsende  $n$  führt sich dieses Muster a priori unendlich fort, jeweils von 10er-Potenz zur nächsten,  $P_n(1)$  wird sich entsprechend nie bei einem statischen Wert einpendeln, die An- und Abstiegsphasen der Wahrscheinlichkeit werden jedoch länger (Humenberger, 2018, S. 166). Die Folge  $(P_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$  ist divergent und schwankt zwischen der statischen Untergrenze  $\frac{1}{9}$  und beweglichen Obergrenzen  $O_m(1) = \frac{11}{19}, \frac{111}{199}, \frac{1111}{1999}, \dots$ , wobei die Folge für  $O_m(1)$  monoton fällt und gegen den Grenzwert  $\frac{5}{9} = 0.\overline{55}$  konvergiert ( $m$  bezeichnet

in dieser Folge die Anzahl Ziffern im Zähler und im Nenner) (Humenberger, 2018, S. 166). In den folgenden drei Abbildungen steht die y-Achse jeweils für die Auftrittswahrscheinlichkeit der untersuchten Ziffer.

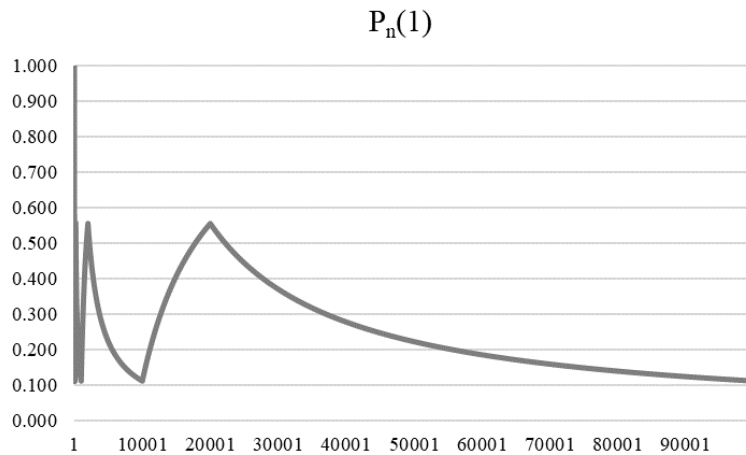


Abbildung 8:  $P_n(1)$  für  $n=100'000$  (eigene Darstellung)

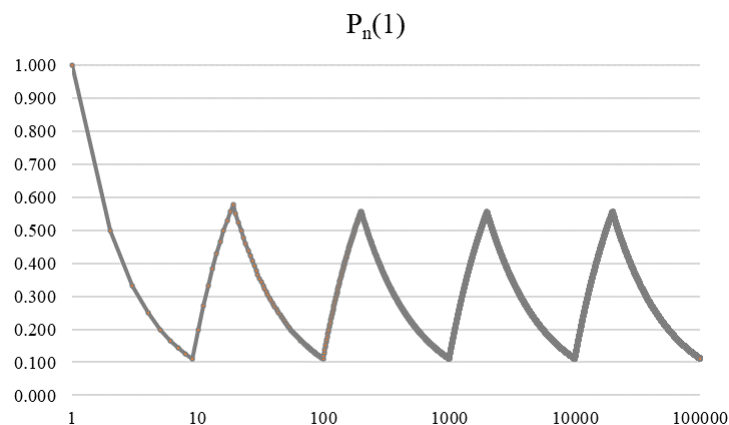


Abbildung 7:  $P_n(1)$  für  $n=100'000$ , logarithmierte x-Achse (eigene Darstellung)

Betrachtet man nun  $P_n(9)$  in derselben Art und Weise, wird ersichtlich, dass der Sachverhalt nun genau umgekehrt ist, die Untergrenzen sind nun nicht mehr statisch, sondern mit wachsenden  $n$  monoton wachsend gegen  $\frac{1}{81}$ , während die Obergrenze statisch bei  $\frac{1}{9}$  liegt (Humenberger, 2018, S. 167). Für die Ziffern 2 bis 8 sind sowohl die unteren als auch die oberen Grenzen nicht konstant. In Abbildung 9 wird ersichtlich, dass  $P_n(9)$  keinen Wert annehmen kann, der grösser ist als jeglicher Wert von  $P_n(1)$ . Es wird also erkennbar, dass die Ziffer 1 als erste Ziffer einer Zahl häufiger vorkommt als die Ziffer 9 (Humenberger, 2018, S. 168).



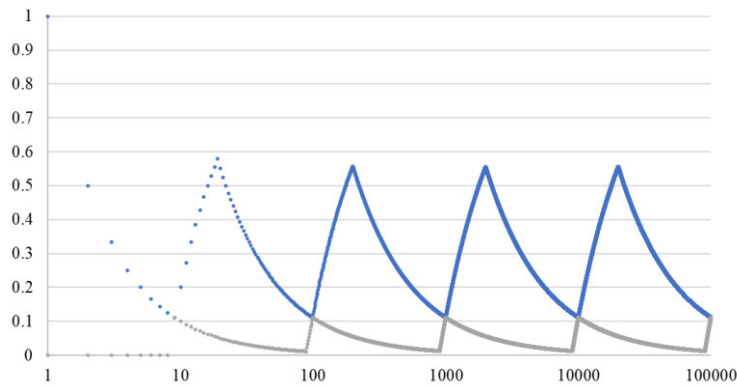


Abbildung 9: Verläufe von  $P_n(1)$  und  $P_n(9)$  (eigene Darstellung)

Auf eine tiefergehende Betrachtung dieses Sachverhalts wird aus Gründen fehlender Relevanz verzichtet.

## 2.6 Beweise

Ebenfalls aus Gründen fehlender Relevanz wird verzichtet, vertieft auf bisher erbrachte Beweise zur Gültigkeit des Benfordschen Gesetzes einzugehen, es sei an dieser Stelle aber bemerkt, dass mehrere Arbeiten zu diesem Thema existieren. Ein prominentes Beispiel dafür ist "Base-Invariance implies Benford's Law" von Theodore Hill (1995), in welchem Hill das Benfordsche Gesetz mittels des Konzepts der Baseninvarianz herleitet. In "*A basic theory of Benford's Law*" von Arno Berger und Theodore P. Hill (2011) werden einige schon erbrachte Beweise kritisch überprüft, während Roger Pinkham (1961) in "On the Distribution of First Significant Digits" eine ausführliche mathematische Herleitung präsentiert.

## 2.7 Konformitätsprüfung

Eine besondere Herausforderung im Umgang mit dem Benfordschen Gesetz ist die Konformitätsprüfung, also die Beurteilung, ob und in welcher Güte ein Datensatz der Benfordschen Verteilung folgt oder eben davon abweicht. Die Frage, die es hier zu stellen gilt, ist, nach welchen Kriterien also die Güte einer solchen Verteilung beurteilt werden soll. Gerade bei grösseren Datensätzen – paradoxerweise jene Datensätze, die *eher* Benford-konform sind (vgl. Abschnitt 2.8) – liefern einige statistische Tests trotz subjektiv guter Konformität einer Verteilung Ergebnisse, die auf signifikante Abweichungen hindeuten (Kossovsky, 2021, S. 426). In den folgenden Unterabschnitten sollen einige

statistische Tests beleuchtet werden, die im Kontext des Benfordschen Gesetzes oft angewandt werden.

### 2.7.1 Chi-Quadrat

Bei einem Chi-Quadrat-Test (oft als  $\chi^2$  notiert) würde die Nullhypothese  $H_0$  formuliert, wonach die ersten Ziffern der Zahlen eines Datensatzes der Benfordschen Verteilung entsprechen. Der Verteilungstest wird angewandt, um die Verteilung beobachteter Daten mit einer erwarteten Verteilung zu vergleichen (andere Anwendungen unterschiedlicher Ausprägungen von Chi-Quadrat-Tests werden nicht weiter beleuchtet) (In Anlehnung an Savoy (o.J., S. 15)):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(R_b - R_e)^2}{R_e}$$

In dieser allgemeinen Form des Tests steht  $R_b$  für die beobachteten Resultate,  $R_e$  für die erwarteten Resultate und  $K$  für die Anzahl Merkmale oder Ausprägungen; im Falle der Überprüfung der Benford-Konformität sind das üblicherweise 9 (falls nur nach der jeweils ersten Ziffer überprüft wird) oder 90 (falls nach den ersten zwei Ziffern überprüft würde). Die Anzahl Freiheitsgrade beträgt  $K - 1$ . Für den Einsatz des Tests im Kontext des Benfordschen Gesetzes formuliert Hungerbühler (2007, S. 19) eine spezifischere Formel für die Anwendung, wobei  $N_i$  die Häufigkeit der Ziffer  $i$  in der Stichprobe sei und jeweils die erste Ziffer relevant ist ("*first digit law*"):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{\left(N_i - n \times \log\left(1 + \frac{1}{i}\right)\right)^2}{n \times \log\left(1 + \frac{1}{i}\right)}$$

Der berechnete Wert wird mit einem kritischen Wert verglichen. Ist die Teststatistik grösser als dieser kritische Wert, wird die Nullhypothese verworfen und man müsste feststellen, dass die untersuchte Verteilung auf dem gewählten Signifikanzniveau von der Benfordschen Verteilung abweicht – je grösser die Differenz, desto stärker die Abweichung. Der kritische Wert kann in Abhängigkeit der Freiheitsgrade und des Signifikanzniveaus

$\alpha$  aus einer Tabelle von  $\chi^2$ -Quantilen abgelesen oder aber berechnet werden. Bei 8 Freiheitsgraden und einem  $\alpha$  von 0.05 betrüge der kritische Wert 15.51 (Kossovsky, 2021, S. 425). Hier wird eine Schwäche des Chi-Quadrat-Tests apparent. Wie auch andere Signifikanz-Tests leidet die Aussagekraft des Chi-Quadrat-Tests mit wachsender Stichprobengrösse, je grösser der Datensatz, desto stärker wirken sich auch kleine Abweichungen auf die Teststatistik aus, da der Fehler quadriert wird. Gerade bei Anwendungen zur Überprüfung der Benford-Konformität ist diese Tatsache nicht unproblematisch, da grössere Datensätze eher Benford-verteilt sind als kleinere (vgl. Abschnitt 2.8) und die meisten Verteilungen der Benfordschen Verteilung nur approximativ entsprechen (siehe hierzu auch die Tabellen aus Benfords Untersuchung im Anhang). Der Einsatz des Chi-Quadrat-Tests zur Konformitätsprüfung in diesem Kontext ist daher umstritten. Kossovsky kritisiert den häufigen Einsatz dieser Methode (2021, S. 425): *"It had become a dogma or rather an impulsive ritual in the field of Benford's Law to rush into the chi-square test for whatever data set the researcher is considering, regardless of its true applicability [...]".* Nicht nur bei grossen Datensätzen liefert der Test nicht-valide Resultate, auch bei (zu) kleinen Sets ist die Methode anfällig für irreführende Ergebnisse. Im linken Teil der Abbildung 10 wird eine Verteilung mit 91'223 Datenpunkten mittels Chi-Quadrat auf Benford-Konformität überprüft. Da  $\chi^2 = 34.7 > 15.5$ , muss festgehalten werden, dass die Verteilung signifikant von der Erwartung abweicht, obwohl visuell eine sehr gute Approximation vorliegt. Umgekehrt wird die Nullhypothese im rechten Teil angenommen (92 Datenpunkte,  $\chi^2 \approx 15.5$ ), obwohl die vorliegende Verteilung offensichtlich stark von der Benfordschen abweicht. Aus den geschilderten Gründen wird der Chi-Quadrat-Test, obschon in der Literatur oft zu diesem Zweck verwendet, in dieser Arbeit für die Konformitätsprüfung nicht angewandt.

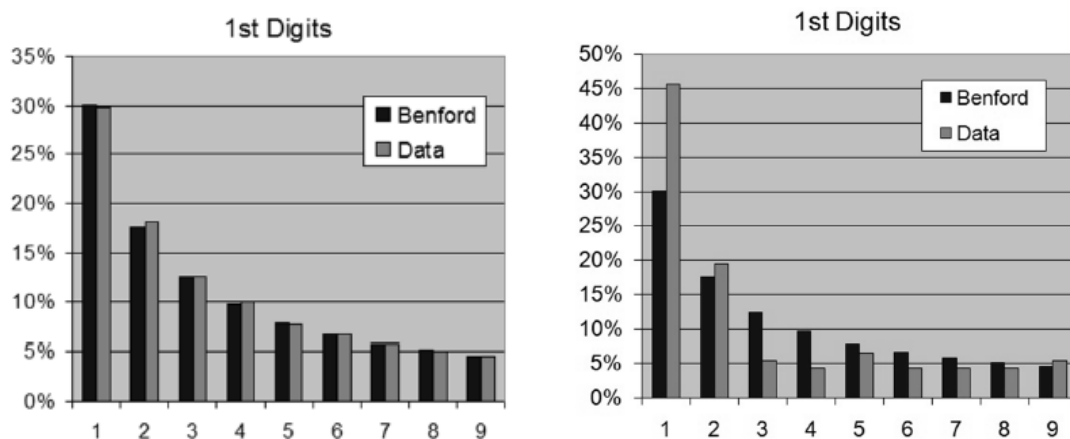


Abbildung 10: Chi-Quadrat liefert irreführende Resultate (Kossovsky, 2021, S. 430-432)

### 2.7.2 Z-Test

Eine etwas sophistiziertere Methode zur Konformitätsprüfung ist der von Nigrini adaptierte Z-Test ("*Z-Statistic*"). Auch dieser Test wird angewandt, um zu testen, ob die beobachtete Häufigkeit einer Ziffer signifikant von der aufgrund des Benfordschen Gesetzes erwarteten Häufigkeit dieser Ziffer abweicht. Angelehnt an Nigrinis Gleichung (2012, S. 150) kann der Test folgendermassen definiert werden:

$$Z = \frac{|p - p_0| - C}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

wobei

$$C = \begin{cases} \frac{1}{2n}, & \frac{1}{2n} < |p - p_0| \\ 0, & \frac{1}{2n} \geq |p - p_0| \end{cases}$$

Hier bezeichnet  $p$  die beobachtete Frequenz einer Ziffer,  $p_0$  entspricht der erwarteten Frequenz dieser Ziffer und  $n$  der Anzahl Datenpunkte.  $C$  ist ein Korrekturfaktor, der nur zur Anwendung kommt, wenn er kleiner ist als der erste Term im Zähler. Wie beim Chi-Quadrat-Test gilt, dass die Nullhypothese ( $H_0$ : Die Frequenz der Ziffer entspricht der erwarteten Frequenz) verworfen werden muss, wenn die Teststatistik den kritischen Wert für eine bestimmte Konfidenz übersteigt, üblicherweise wird hier  $\alpha = 0.05$  verwendet, was zu einem kritischen Wert von 1.96 führt (Nigrini, 2012, S. 151). Auch die Aussagekraft des Z-Tests ist bei grossen Datensätzen limitiert, wenngleich er zuverlässigere Resultate generiert als der Chi-Quadrat-Test. Der Z-Wert steigt (cet. par.) bei wachsendem  $n$  unweigerlich, was bedeutet, dass in kleinen Datensätzen "grössere" Ausreisser toleriert werden könnten, umgekehrt aber bei grossen Datensätzen "kleinere" Ausreisser als signifikant abweichend markiert werden (Nigrini, 2012, S. 151-152). Eine weitere Limitierung des Z-Tests ist, dass er im Unterschied zu Chi-Quadrat nur bedingt für die Konformitätsprüfung einer ganzen Verteilung geeignet ist; per Definition kann nur jeweils die Frequenz einer Ziffer überprüft werden. Um von den einzelnen Z-Werten Rückschlüsse auf

die Verteilungsgüte des gesamten Datensatzes ziehen zu können sind weitere Tests nötig. Dennoch kann der Z-Test für die visuelle Interpretation der Konformität einer Verteilung hilfreiche Hinweise produzieren. Für kleinere Datensätze gilt dies insbesondere dann, wenn zusätzlich Signifikanzgrenzen dargestellt werden: (Nigrini, 2012, S. 152)

$$p_0 \pm \left( 1.96 \times \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p_0}} \right) \pm \frac{1}{2n}$$

Bei grösseren Datensätzen wiederum ist die grafische Darstellung nicht sonderlich dienlich, da sich die Grenzen bei wachsendem Datensatz an  $p_0$  annähern und schon bei  $n = 1'000$  zu nahe beieinander liegen, um sie visuell unterscheiden zu können.

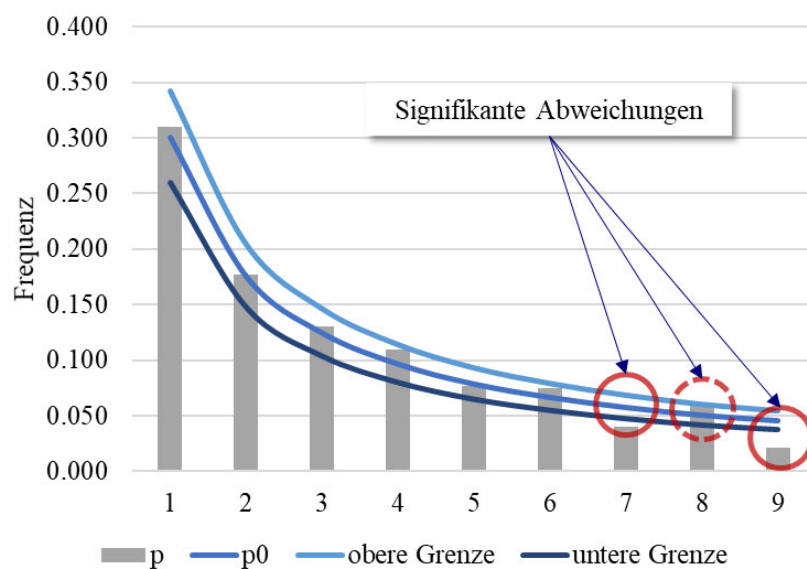


Abbildung 11: Z-Test mit Signifikanzgrenzen (eigene Darstellung)

### 2.7.3 Kolmogorov-Smirnoff-Test

Der Kolmogorov-Smirnoff-Test (KS-Test) ist ein nicht-parametrischer "Goodness-of-Fit"-Test basierend auf der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und vergleicht die empirische Verteilungsfunktion, also die beobachteten Daten, mit der kumulativen Verteilungsfunktion der theoretischen Verteilung (Nigrini, 2012, S. 157). Betrachtet wird die Dichte der Verteilung bis zu einer bestimmten Ziffer, anschliessend wird die Differenz zur erwarteten Dichte berechnet (Nigrini, 2012, S. 157). Im Kontext des Benfordschen Gesetzes könnte diese Methode bei einer Konformitätsprüfung für die ersten zwei Ziffern

("first two digits") Anwendung finden, nur für die erste Ziffer ist die Aussagekraft des Tests beschränkt. Bei Durchführung des Tests würden hier 90 Differenzen gebildet, ausgehend von der Wahrscheinlichkeitsdichte bei der Ziffer 10 bis hin zur Ziffer 90. Die höchste einzelne Differenz zwischen tatsächlicher und erwarteter Dichte würde anschliessend mit dem kritischen Wert verglichen, wobei 1.36 für das Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  konstant ist.

$$\text{Kritischer Wert} = \frac{1.36}{\sqrt{n}}$$

Eine Differenz, die höher ist als der kritische Wert weist auf Nicht-Konformität hin. Allerdings besteht auch bei diesem Verfahren das Problem, dass die Anzahl Datenpunkte in den Nenner einfließt, sodass auch dieser Test anfällig für überhöhte Sensitivität gegenüber grossen Datensätzen ist.

#### 2.7.4 Mittlere absolute Abweichung (MAD)

Alle bisher erläuterten Verfahren unterliegen der Problemstellung, dass die Datensatzgrösse die Zuverlässigkeit ihrer Resultate signifikant beeinflusst und eine reliable Beurteilung der Konformität einer Verteilung zur Benfordschen Erwartung nur für kleine  $n$  möglich ist. Für Anwendungen mit "Real World Data" ist diese Tatsache zu limitierend, da bei allen bisher angeführten Tests bei grossen Datensätzen eine fast perfekte Approximation der Verteilung an die erwartete Distribution nötig wäre, um Konformität statistisch festzustellen – wie in einem vorherigen Kapitel erwähnt, ist das bei echten Daten aber so gut wie nie der Fall. Da in dieser Arbeit ebensolche Daten und vor allem sehr grosse Datensätze analysiert werden, soll zur Umgehung dieses Problems ein Messwert angewandt werden, welcher die Verteilungsgüte grössenagnostisch beurteilt. Nigrini (2012, S. 158) schlägt dahingehend die Anwendung des MAD ("mean absolute deviation") vor, also die Betrachtung der mittleren absoluten Abweichung:

$$MAD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |p_i - p_{0,i}|$$

Hier bezeichnet  $n$  wieder die Anzahl der Kategorien, bei der Betrachtung der ersten Ziffer ist  $n = 9$ ,  $p_i$  ist die tatsächliche Häufigkeit der Ziffer im Datensatz,  $p_{0,i}$  ist die erwartete Häufigkeit dieser Ziffer. Da Abweichungen nicht potenziert werden, hat die Datensatzgrösse im Unterschied zu den anderen Tests keinen Einfluss auf das Resultat, wodurch eine schlüssigere Beurteilung von Konformitätsprüfungen möglich wird. Für ebendiese Beurteilungen sind jedoch kritische Werte nötig, die die quantitativen Grenzen der Konformität festlegen. Anzumerken ist, dass mit der obigen Definition für die MAD solche Werte jedoch nicht berechnet werden können, weshalb Nigrini auf Basis persönlicher Erfahrungen mit Datensätzen, welche im Kontext des Benfordschen Gesetzes untersucht wurden, eine Serie kritischer Werte für ein Scoring-Modell vorschlägt (Nigrini, 2012, S. 159-160). Die Werte dieser Tabelle wurden insofern diskretionär festgelegt, als dass sie keinen statistischen Hintergrund haben, sie finden in der Literatur aber grundsätzlich Akzeptanz (vgl. beispielsweise Banks (2000) oder Cerqueti (2015, S. 10)).

Digits	Range	Conclusion
First Digits	0.000 to 0.006	Close conformity
	0.006 to 0.012	Acceptable conformity
	0.012 to 0.015	Marginally acceptable conformity
	Above 0.015	Nonconformity

Abbildung 12: MAD-Scoring (Nigrini, 2012, S. 160)

## 2.8 Voraussetzungen und Gültigkeitsbereich

Wie im Abschnitt 2.5 erwähnt, müssen Datensätze bestimmte Anforderungen erfüllen, damit sie der Benfordschen Verteilung überhaupt gehorchen *können*, wodurch die Anzahl potenziell geeigneter Datensätze begrenzt wird. Benford selbst beschreibt, dass Daten gewählt werden sollten, deren numerischer Wertebereich nicht zu stark eingeschränkt sein soll, ausserdem darf der Datensatz nicht zu stark bearbeitet worden sein (Benford, 1938, S. 552). Diese doch rudimentären Bedingungen wurden in der Literatur glücklicherweise weiter präzisiert. William Goodman (2016, S. 39) schlägt beispielsweise eine Bedingung bezüglich ausreichender Datensatzgrösse vor; wie im Kapitel 2.5 demonstriert führt ein zu kleiner Datensatz dazu, dass die Verteilung der ersten Ziffern das Benfordsche Gesetz gar nicht approximieren *können*. Limitierend kommt hinzu, dass bei kleinen Datensätzen auch kleine Abweichungen zu invaliden Aussagen über die Natur der Verteilung führen können, sowohl mit liberaleren als auch restriktiveren Testmethoden. Goodman formuliert in seinem Vorschlag zwar keine minimale Datensatzgrösse, in der Literatur wird aber

oft mindestens  $n = 1000$  empfohlen (siehe beispielsweise Singleton, 2011). In einem späteren Abschnitt dieser Arbeit wird demonstriert, dass die Approximation der Verteilung zum Benfordschen Gesetz mit wachsender Stichprobengrösse sogar tendenziell steigt, die Benford-Konformität also zunimmt. Auch die im Datensatz enthaltenen Magnituden sind von Bedeutung, Datensätze können dann Benford-konform sein, wenn sie exponentiell wachsen (z.B. 10er, 100er, 1000er, 10'000er usw.) sich also über mehrere Grössenordnungen erstrecken (Singleton, 2011). Auch dürfen die Daten nicht im Vorhinein "natürlich" limitiert sein, würden beispielsweise die Körpergrössen erwachsener Personen in Zentimetern auf Benford-Konformität untersucht, käme man schnell zum Schluss, dass bis auf wenige Ausnahmen alle Körpergrössen mit der Ziffer 1 beginnen. Goodman empfiehlt des Weiteren, dass Datensätze verwendet werden sollten, deren Verteilungen (der Zahlen, nicht der ersten Ziffern) Rechtsschiefe aufweisen, also eher mehr kleinere als grössere Zahlen auftreten. Er begründet dies damit, dass Datensätze oft aufgrund ihrer rechnerischen Grundlage Benford-konform sind:

*"Data sets that conform to Benford's law often have combinatorial or multiplicative origins [...]. Numbers generated like this tend to have logarithmic-type distributions, with extended "right tails" of large values, and are, in turn, more likely to exhibit Benford patterns"* (Goodman, 2016, S. 39).

Die Zahlen im Datensatz dürfen ausserdem keiner systematischen Logik folgen oder durch Menschenhand zugeteilt worden sein (wie beispielsweise Autokennzeichen oder Postleitzahlen), müssen entsprechend "natürlich" entstanden, also zufälligen Ursprungs sein (Singleton, 2011). Im zu untersuchenden Datensatz sollte die Messgrösse der Daten identisch sein, mindestens aber dieselbe Dimension aufweisen (also zum Beispiel Schweizer Franken und Euro, nicht aber Milliliter und Gallonen) (Brinkert, 2016, S. 24). Statistische Messwerte wie Mediane, Quantile o.ä. folgen ausserdem eigenen statistischen Verteilungen und sind daher in der Regel nicht Benford-verteilt (Brinkert, 2016, S. 24).



## 2.9 Literaturreview

In diesem Teil der Arbeit werden zum Thema relevante Beiträge in der bestehenden Literatur dargelegt. Auf eine Bearbeitung von Literatur zu theoretischen und mathematischen Grundlagen zum Benfordschen Gesetz wird an dieser Stelle verzichtet, es soll ausschliesslich der Wissenstand in Bezug auf das Benfordsche Gesetz im Kontext von Aktienmärkten beleuchtet werden. Nicht berücksichtigt wird auch Literatur, welche sich mit *Fraud Detection* beschäftigt, auch wenn daraus Investmentstrategien hervorgehen können (insbesondere Shorting-Strategien, siehe hierzu beispielsweise das Paper "*Designing Shorting Strategies with Benford's Law*" von Keh, 2022). Stattdessen soll Literatur beleuchtet werden, welche sich im Kontext des Benfordschen Gesetzes mit Aktien- und Indexpreisen auseinandersetzt. Obschon das Interesse am Thema in der Literatur zu wachsen scheint, sei an dieser Stelle erwähnt, dass das Benfordsche Gesetz und dessen Anwendung in Bezug auf quantitative Grössen aus Finanzmärkten nach wie vor ein Nischendasein fristet. Die bestehende Forschung und Literatur aus verlässlichen Quellen beschränken sich daher auf wenige Berichte und Artikel.

### 2.9.1 Konformität im S&P 500 und im Dow Jones

Einer der frühesten Berichte in diesem Bezug erschien 1996 im *American Statistician*. Ley untersucht darin Muster von täglichen Returns der beiden amerikanischen Leitindizes S&P 500 und Dow-Jones Industrial Average und überprüft diese auf ihre Konformität zum Benfordschen Gesetz. Returns definiert er wie folgt (Ley, 1996, S. 311):

$$r_t = \frac{\ln(p_{t+1}) - \ln(p_t)}{d_t} \times 100$$

Dabei steht  $d_t$  für die Anzahl Tage zwischen Handelstagen  $t$  und  $t + 1$  (beispielsweise wäre  $d_t = 3$ , wenn  $t$  ein Freitag ist). Da gilt:

$$p_{t+1} = p_t \frac{\ln(p_{t+1})}{p_t}$$

bezeichnet  $r_t$  hier die stetige Rendite zwischen  $t$  und  $t + 1$  (dieser Sachverhalt wird hier aufgegriffen, weil sich diese Methode von der im praktischen Teil dieser Arbeit angewandten unterscheidet). Ley teilt durch die Anzahl Tage, um immer gleich lange Perioden für  $r_t$  zu erhalten. Auf dieser Basis beobachtet Ley die Auftrittshäufigkeit der Ziffern  $\{1,2, \dots 9\}$  als erste Ziffern der täglichen, stetigen Returns der beiden Indizes über sehr lange Zeiträume; für den Dow-Jones wird der Zeitraum von Januar 1900 bis Juni 1993, für den S&P 500 von Januar 1926 bis Juni 1993 betrachtet. Ley kommt zur heuristischen Aussage, dass für die Returns über diese Zeiträume eine durchaus genaue Approximation an die Benfordsche Verteilung zustande kommt. Würde man den Goodness-of-Fit auf Basis der Summe der absoluten Abweichungen zwischen den erwarteten und den tatsächlichen Häufigkeiten beurteilen, wären die beiden Verteilungen näher an Benfords Vorschlag als die meisten von ihm selbst untersuchten Datensätze (Ley, 1996, S. 312). In der unten abgebildeten Tabelle legt Ley die gefundenen Resultate vor (auf die Spalte "Prior" wird aus Gründen fehlender Relevanz nicht eingegangen). Erwähnenswert an dieser Stelle ist, dass auch Ley die Eignung des Chi-Quadrat-Tests als Goodness-of-Fit-Tests kommentiert und erläutert, dass die Nullhypothese unter Anwendung dieser Methode verworfen werden müsste, dies sei auf die sehr grosse Anzahl Datenpunkte zurückzuführen. Betrachte man nur die letzten zehn Jahre der Datenreihe, könne mit  $\alpha = 0.05$  und acht Freiheitsgraden allerdings eine Konformität festgestellt werden (Ley, 1996, S. 312).

Table 1. Prior and Posterior Mean Versus Benford's Law

$i$	Prior	Posterior		Benford's law
		DJIA (1900–1993)	S&P's (1926–1993)	
1	11.11%	28.94%	29.17%	30.10%
2	11.11%	16.78%	16.96%	17.61%
3	11.11%	12.38%	13.42%	12.49%
4	11.11%	9.99%	9.87%	9.69%
5	11.11%	8.48%	7.76%	7.92%
6	11.11%	7.23%	7.13%	6.69%
7	11.11%	6.15%	5.60%	5.80%
8	11.11%	5.32%	5.36%	5.12%
9	11.11%	4.72%	4.73%	4.58%
$\sum  \hat{\theta}_i - f(i) $		4.22%	3.88%	
$\chi^2(8)$		71.98	43.46	
$N$		33,804	24,126	

Abbildung 13: Auftrittshäufigkeit der Ziffern für stetige Returns(Ley, 1996, S. 312)

In seiner Untersuchung geht Ley ausserdem auch auf Grössenordnungen der täglichen Veränderungen ein. Unter der Annahme, dass kleine Veränderungen der stetigen Returns

wahrscheinlicher sind als grössere (also 0.1 wahrscheinlicher ist als 0.2, was wiederum wahrscheinlicher wäre als 0.3) könnte man auch ohne grössere Nachforschungen davon ausgehen, dass eine Verteilung entsteht, die dem Benfordschen Gesetz zumindest annähernd folgt. Das erscheint zwar durchaus intuitiv, die Prämisse wäre aber nur dann korrekt, wenn sich dieser Sachverhalt innerhalb mehrerer jener Grössenordnungen, in denen sich Aktienrenditen üblicherweise bewegen (beispielsweise 0.01%, 0.1%, 1.0%) beweisen liesse. Tatsächlich entspricht diese Annahme den in diesen sehr langen Zeiträumen nicht den beobachteten Werten; für  $|r| < .1$  sind die jeweils ersten Ziffern ungefähr gleichverteilt, für  $|r| \geq 1$  entsteht eine ausgeprägte Rechtsschiefe. Eine Annäherung an die Benfordsche Verteilung entsteht ausschliesslich im Intervall  $.1 \leq |r| < 1$ , welches aber gleichzeitig ungefähr zwei Drittel aller Datenpunkte umfasst. In Aggregation entstehen die Verteilungen in Abbildung 13 (Ley, 1996, S. 313).

### 2.9.2 Benford und Berichtssaison

In einem Paper untersuchen Jayasree, Pavana Jyothi und Ramya im Benford-Kontext Verteilungsmuster von Aktienreturns und Handelsvolumina während und nach der Berichtssaison für den indischen Aktienmarkt sowie deren Implikationen für Investoren, können jedoch keine konsistenten oder signifikanten Resultate vorlegen (Jayasree, Pavana Jyothi, & Ramya, 2018).

### 2.9.3 Indizes, Aktien und Volatilitätsmodell

Lindgren und Ternqvist (2021) untersuchen in ihrer Arbeit unterschiedliche Grössen aus dem Finanzmarkt auf Benford-Konformität und beleuchten hierbei insbesondere die Frage, welchen Einfluss die Datenfrequenz auf die Konformität eines Datensatzes hat. Ausserdem wird versucht, ob Erkenntnisse aus diesen Untersuchungen für Vorhersagemodelle und Prognosen verwendet werden können. Gemessen wird neben täglichen relativen Preisveränderungen ( $PC$ ) unterschiedlicher Indizes und Aktien auch der Wert  $PCV$ , welcher der relativen Preisveränderung eines Basiswerts multipliziert mit dem gehandelten Volumen während diesem Zeitraum entspricht (Lindgren & Ternqvist, 2021, S. 19)

$$PC(V) = \frac{close_t - close_{t-1}}{close_{t-1}} (\times Volume)$$

Zur Konformitätsmessung wenden die Autoren Chi-Quadrat-Tests an, dessen limitierenden Charakter sie in der Diskussion ihrer Resultate anerkennen. Für die Indizes FSTE 100, Nasdaq, OMX Stockholm sowie den S&P 500 können die Autoren im Zeitraum 1999 – 2021 für die täglichen Preisveränderungen unter Anwendung von Chi-Quadrat keine Konformität feststellen, für den Messwert *PCV* jedoch schon, siehe Abbildung 14 (Lindgren & Ternqvist, 2021, S. 25). Die Autoren führen diese Tatsache auf die potenzielle Nichterfüllung einer Bedingung an Datensätze zurück (vgl. hierzu Abschnitt 2.8) und führen das Argument an, dass Preisveränderungen innerhalb eines bestimmten Intervalls wahrscheinlicher seien und daher eine zugrundeliegende systematische "Logik" zu ver-

Index	Period	Metric	p-value	C/NC*
UKX	1999 - 2021	PC	$<10^{-4}$	NC
GSPC	1999 - 2021	PC	$<10^{-4}$	NC
IXIC	1999 - 2021	PC	0.0138	NC
OMXS30	1999 - 2021	PC	$<10^{-4}$	NC
UKX	1999 - 2021	PCV	0.3572	C
GSPC	1999 - 2021	PCV	0.3098	C
IXIC	1999 - 2021	PCV	0.0553	C

\*C = Conforming, NC = Non-conforming

Abbildung 14: PC und PCV verschiedener Indizes (Lindgren & Ternqvist, 2021, S.25)

muten sei. Für den Messwert *PCV* sei dies aufgrund der Multiplikation mit dem Volumen nicht der Fall, weshalb diese dem Benfordschen Gesetz folgten (Lindgren & Ternqvist, 2021, S. 26). Die Autoren schliessen daraus, dass Indizes dem Benfordschen Gesetz folgen, wenn als Messwert *PCV* eingesetzt wird. Zwar ist das Handelsvolumen eine in der Praxis durchaus vielbeachteter Grösse, insbesondere bei Überlegungen in Bezug auf die Liquidität und die Volatilität eines Börsenwerts (Beispiele hierfür sind Messwerte wie "Dollar Volume oder Relative Volume"). An dieser Stelle sei allerdings kritisch angeführt, dass der Messwert *PCV* trotz mathematischer Korrektheit keine Grösse ist, die im Kontext von Finanzmärkten breite Anwendung findet, sondern einen gewissermassen arbiträren Charakter hat.

Aufgrund ihrer Erkenntnis verwenden Lindgren und Ternqvist (2021, S. 27ff.) zur Untersuchung vierer Aktien aus dem schwedischen Index OMX 30 nur noch den *PCV*. Im Unterschied zu den Indizes betrachten die Autoren hierbei aber nicht nur tägliche

Veränderungen, sondern berücksichtigen vier verschiedene Intervalle (tägliche, 30-minütige, 10-minütige und 1-minütige relative Preisveränderungen, jeweils über unterschiedliche Zeiträume). Sie halten fest, dass der *PCV* der untersuchten Aktien dem Benford-schen Verteilungsgesetz in den meisten Intervallen folgt, jedoch keine signifikanten Muster bezüglich der einzelnen Intervalle festgestellt werden konnten, die Konformität also offenbar nicht mit der Frequenz zu korrelieren scheint (Lindgren & Ternqvist, 2021, S. 35).

<b>Equity</b>	<b>C</b>	<b>NC</b>	<b>% C</b>
ERIC B	21	2	91.3%
HM B	20	3	86.96%
INVE B	16	7	69.6%
VOLV B	19	4	82.6%
<b>Total</b>	<b>76</b>	<b>16</b>	<b>82.61%</b>

<b>Data Frequency</b>	<b>C</b>	<b>NC</b>	<b>% C</b>
Daily	3	1	75%
30 Minutes	11	1	91.67%
10 Minutes	10	2	83.33%
<b>1 Minute Quarterly (Monthly)</b>	<b>13 (40)</b>	<b>2 (8)</b>	<b>81.25% (83.33%)</b>

Abbildung 15: Anteile konformer Aktien (PCV) in verschiedenen Intervallen (Lindgren & Ternqvist, 2021, S.35)

Zur Untersuchung durch Lindgren und Ternqvist ist kritisch anzumerken, dass die Aussagekraft dieser Untersuchung (in Bezug auf Korrelation und Muster) eingeschränkt sein könnte, da nur vier Aktien untersucht wurden. Für die täglichen Veränderungen, die pro Aktie von 2011 bis 2019 betrachtet wurden, entstehen dadurch nur vier beurteilbare Resultate, wovon bei einer keine Konformität festgestellt wurde, was den Anteil konformer Daten natürlich drastisch reduziert. Betrachtet man die gewählten Daten und Zeiträume etwas genauer, kann ausserdem ein weiterer Sachverhalt festgestellt werden, welcher die Konformitätsmessung verfälscht. Aufgrund des Einsatzes des Chi-Quadrat-Tests, welcher grössere Datensätze "strenger" kategorisiert als kleinere, variiert die Güte der Konformitätsbeurteilung in den untersuchten Datensätzen signifikant, da deren Grösse ebenfalls stark variiert. Geht man von 252 Handelstagen und 7.5 Stunden aktivem Handel pro Tag aus (Desenne, 2023), besteht ein Datensatz für tägliche Veränderungen während 9

Jahren aus knapp 2'300 Datenpunkten, während ein Datensatz für 1-minütige Veränderungen über ein Quartal gut 28'000 Punkte beinhaltet.

In ihrer Arbeit wenden Lindgren und Ternqvist dieselben Prinzipien ausserdem auf drei verschiedene Instrumente aus der technischen Analyse an (also beispielsweise der Wert des Relative Strength Index für eine der vier Aktien multipliziert mit ihrem Handelsvolumen), was allerdings keine nennenswerten oder konsistenten Resultate in Bezug auf Benford-Konformität generiert (Lindgren & Ternqvist, 2021, S. 39ff.).

Im letzten Teil der Arbeit wird versucht, ein Volatility-Forecasting-Modell auf Basis von Benford-Konformitätsdaten zu erstellen. Aufgrund der Schwächen des Chi-Quadrat-Tests wird als konformitätsprüfender Messwert der MAD eingeführt (die Autoren nennen ihn "Sum of Absolute Deviation", die Formel ist jedoch dieselbe) (Lindgren & Ternqvist, 2021, S. 57). Für minütliche Preisänderungen der vier Aktien wurden die *PCV* und davon anschliessend die MADs berechnet, um diese in einem linearen Regressionsmodell gegen Volatilitätsdaten zu modellieren. Das resultierende Modell liefert allerdings Volatilitäten, die im Schnitt 36.23% von der tatsächlichen Volatilität abweichen. Die Autoren halten fest, dass zwar Korrelationen zwischen MAD und Volatilität beobachtet wurden, das Modell aber keine zuverlässigen Vorhersagen produzieren kann (Lindgren & Ternqvist, 2021, S. 54).

### **3 Empirischer Teil**

Im Literaturteil dieser Arbeit wird offenbart, dass der aktuelle Stand der Forschung in Bezug auf das Benfordsche Gesetz im Kontext von Finanzmarktgrössen wie Returns oder Volatilität noch lückenhaft und stellenweise wenig aussagekräftig ist. Untersucht wurden bisher nur entweder sehr lange oder recht kurze Zeiträume, die Konformitätsmessung mittels Chi-Quadrat verfälscht zumindest potenziell wohl für beide Arten von Zeiträumen die Resultate. Aus diesem Grund soll im empirischen Teil dieser Arbeit insbesondere auf Aktien- und Aktienindexkursveränderungen über verschiedene Zeiträume eingegangen werden, die Konformität zur Benfordschen Verteilung wird mittels Nigrinis Scoring-Modell zur mittleren absoluten Abweichung (MAD) (2012, S. 160) beurteilt. Dadurch soll veranschaulicht werden, ob und welche Zusammenhänge zwischen dem Benfordschen Gesetz und ausgewählten Finanzmarktgrössen bestehen, insbesondere wird dabei auf

relative Tageskursveränderungen fokussiert. Folgende Fragestellungen sollen bearbeitet werden:

- *Können Aktienkursveränderungen eine Benfordsche Verteilung annehmen?*
- *Welchen Einfluss hat der gewählte Zeitraum auf die Resultate?*
- *Welchen Einfluss hat die Grösse des gewählten Datensatzes auf die Resultate?*
- *Welche Erklärungen gibt es für gute und für schlechte Approximationen?*
- *Gibt es Zusammenhänge zwischen Approximationsgüte und quantitativen Finanzmarktgrössen?*

Basierend auf der dargelegten Literatur scheint es zumindest möglich, dass Aktienkurse der Benfordschen Verteilung folgen. Betrachtet man die Bedingungen, die ein Datensatz erfüllen muss, damit er überhaupt Benford-konform sein *kann* (vgl. Abschnitt 2.8) ist festzustellen, dass Aktienkurse beziehungsweise deren Veränderungen diesen Voraussetzungen entsprechen. Aufgrund der Verfügbarkeit von täglichen Aktienkursen bis in die 1950-Jahre – für die Konstituenten einiger amerikanischer Indizes sogar noch weiter zurück – dürften hinsichtlich Datensatzgrössen keine Limitierungen entstehen. Wenngleich sowohl relative als auch absolute Preisveränderungen nach oben theoretisch unlimitiert sind, so bewegen sie sich bei absoluter Betrachtung der Veränderung de facto meist in einem bestimmten Intervall (vgl. 3.1.7) erstrecken sich aber über verschiedene Grössenordnungen. Eine Rechtsschiefe – also die Tatsache, dass kleinere Werte öfters auftreten als grössere Werte – ist ebenfalls gegeben (Ley, 1996, S. 313), ebenso ist die Messgrösse jeweils identisch.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass zum Zweck besserer Lesbarkeit nicht der jeweils untersuchte Parameter bezeichnet wird, sondern der jeweilige Basiswert. Ist im weiteren Verlauf der Arbeit beispielsweise festgehalten, dass die Aktie X dem Benfordschen Gesetz folgt, ist damit gemeint, dass die jeweils ersten Ziffern der relativen Tageskurse dieser Aktie X dem Benfordschen Gesetz folgen. Ebenfalls sei erwähnt, dass, wenn beispielsweise vom S&P 500 die Rede ist, grundsätzlich immer gemeint ist, dass die betreffende Untersuchung auf sämtlichen Konstituenten des Index und auf Daten des Index selbst durchgeführt wurde.

### 3.1 Resultate

In diesem Abschnitt wird überprüft, inwiefern relative Kursveränderungen unterschiedlicher Aktien und Indizes die Benfordschen Verteilung approximieren, zur Beurteilung der Konformität wird der eingeführte MAD-Score verwendet. Anders als Ley (vgl. Abschnitt 2.9.1) wird nicht die stetige Rendite betrachtet, sondern die einfache Kursveränderung; im ersten Teil dieses Abschnitts handelt es sich um tägliche Aktien- und Indekurse:

$$\frac{p_t - p_{t-1}}{p_{t-1}} \quad (1)$$

Betrachtet werden 16 verschiedene Intervalle innerhalb des Zeitraums zwischen dem 1. Mai 2013 und dem 30. April 2023.

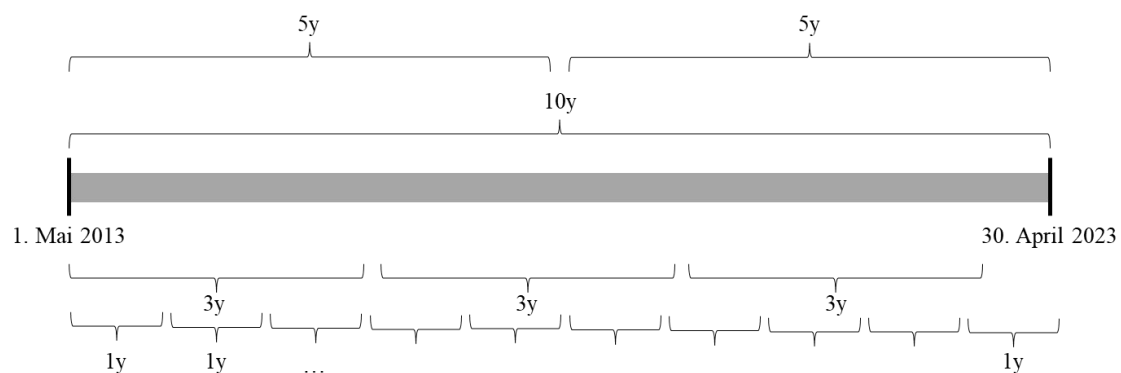


Abbildung 16: Beobachtungszeiträume (eigene Darstellung)



### 3.1.1 Euro STOXX 50

Mittels der eingeführten Methode kann nun für jede Aktie beurteilt werden, ob dessen Approximation an die Benfordsche Verteilung die Konformitätsgrenze im gewählten Zeitraum und den verschiedenen Intervallen erreicht, ausserdem lässt das Vorgehen Vergleiche zwischen den einzelnen Wertpapieren zu. Betrachtet man beispielsweise die Verteilung der ersten Ziffern der Aktien von AXA, Volkswagen und Infineon im Zeitraum von 10 Jahren mit der erwarteten Verteilung durch das Gesetz, ergibt sich folgendes Bild:

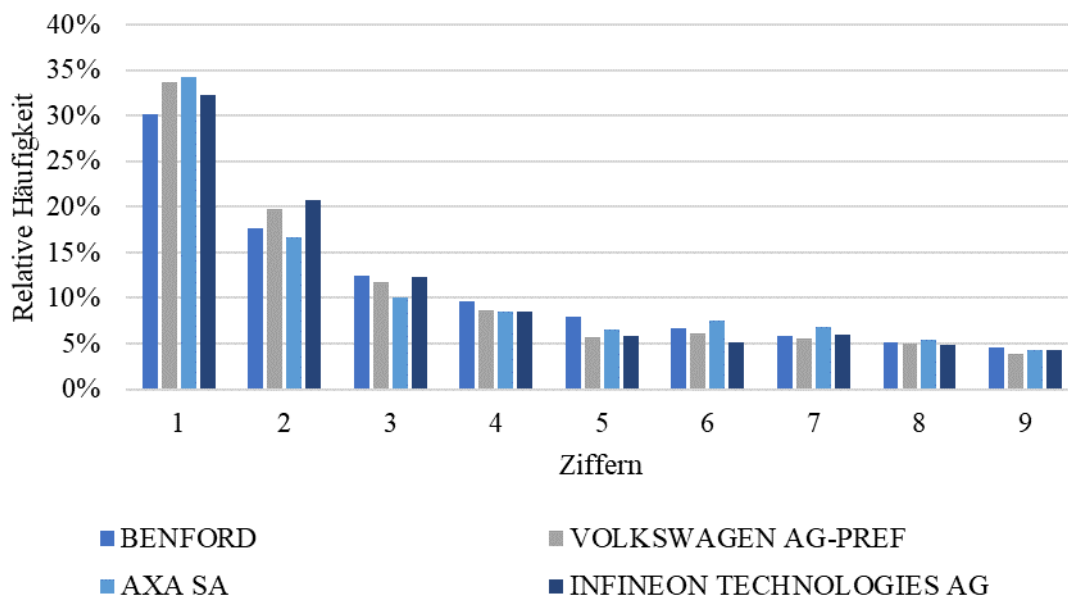


Abbildung 17: Verteilung der ersten Ziffern von Tageskursveränderungen einiger Aktien und Benfordsche Erwartung (eigene Darstellung)

Bei der Betrachtung der Verteilung der ersten Ziffern der relativen Tageskursveränderungen der Konstituenten des Euro STOXX 50 und des Index selbst wird augenscheinlich, dass die Konformität zur Benfordschen Verteilung mit länger werdenden Intervallen zu steigen scheint. Trotz eines Ausreissers in einer 3-jährigen Periode, in welcher die Konformität überdurchschnittlich hoch ist, korreliert der Anteil jener Aktien, deren MAD kleiner oder gleich 0.015 (also der Konformitätsgrenze gemäss Nigrini (2012, S. 160)) signifikant mit der Länge des Intervalls (und damit der Anzahl Datenpunkte im Datensatz). Mit dem Ausreisser beträgt der Korrelationskoeffizient rund 0.87, ohne den Ausreisser sogar 0.93, damit entsteht ein erster Hinweis für die Korrektheit der Prämisse, dass grössere Datensätze – zumindest im vorliegenden Kontext – die Benfordsche Verteilung besser approximieren als kleine Datensätze (vgl. Abschnitt 2.8). Die erste Zeile in der unten abgebildeten Tabelle weist aus, dass gut 92% der untersuchten Basiswerte (47 von

51) in einem Zeitraum von 10 Jahren einen MAD-Score von kleiner oder gleich 0.015 erreicht haben und der Benfordschen Verteilung damit folgen, bei den 1-jährigen Zeiträumen erreichen im Durchschnitt nur knapp 21% der Basiswerte die Konformitätsgrenze. In Abbildung 18 sind einige Intervalle für den Euro STOXX 50 Index dargestellt.

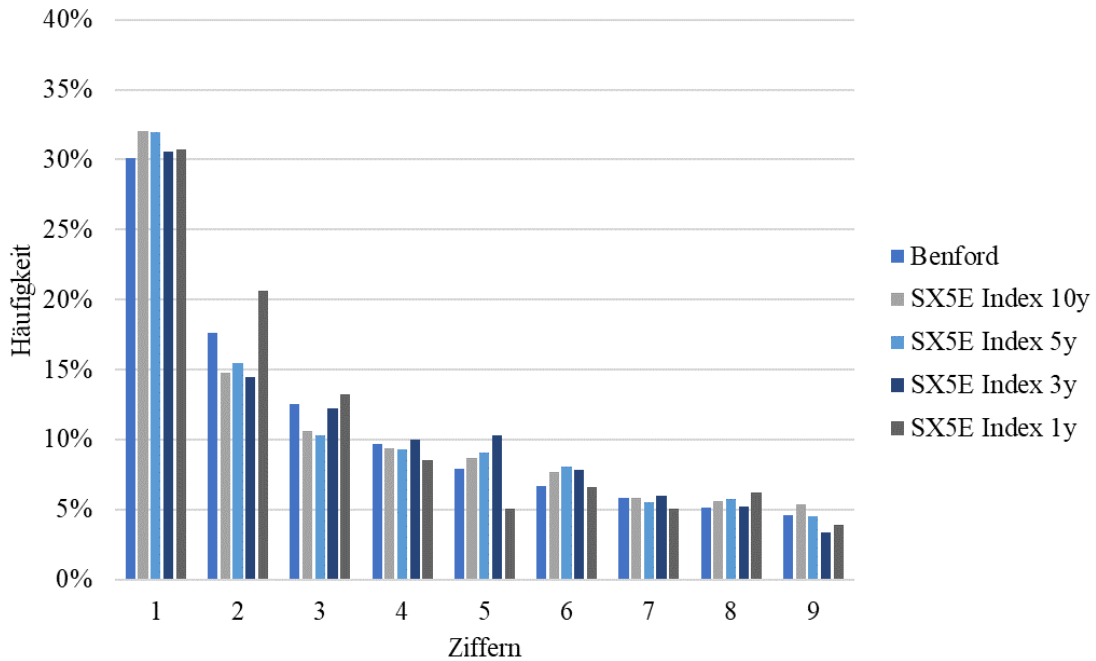


Abbildung 18: Verteilung der ersten Ziffern der täglichen Kursveränderungen des Index über verschiedene Intervalle im Vergleich zur Benfordschen Verteilung (eigene Darstellung)

Intervall	Start	MAD < 0.015
10y	01.05.2013	92.16%
5y	01.05.2013	71.43%
5y	01.05.2018	76.47%
3y	01.05.2013	42.86%
3y	01.05.2016	46.00%
3y	02.05.2019	82.35%
1y	01.05.2013	14.58%
1y	02.05.2014	20.41%
1y	03.05.2015	18.37%
1y	03.05.2016	22.45%
1y	04.05.2017	10.20%
1y	05.05.2018	16.00%
1y	06.05.2019	31.37%
1y	06.05.2020	33.33%
1y	07.05.2021	25.49%
1y	08.05.2022	17.65%

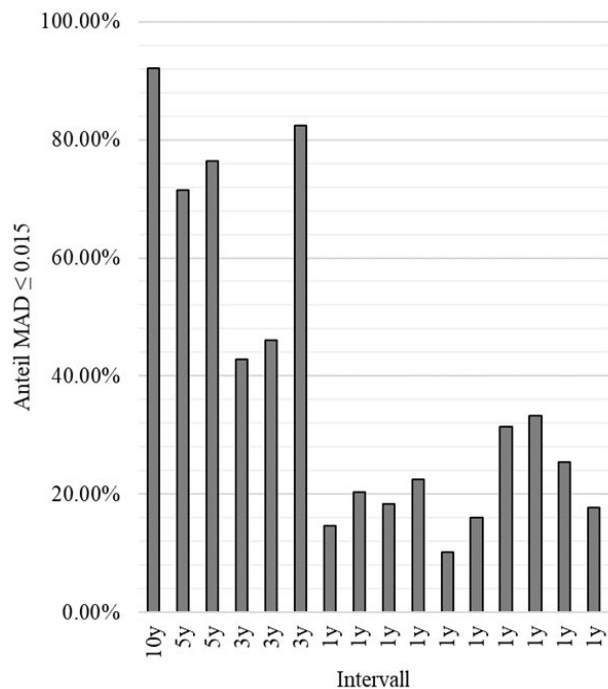


Tabelle 1: Anteil konformer Basiswerte in Intervallen, Euro STOXX 50 (eigene Darstellung)

In Bezug auf die Standardabweichung der MAD war zu erwarten, dass die diese mit wachsender Anzahl Datenpunkte sinkt, dieser Sachverhalt trifft wohl auf viele statistische Untersuchungen zu. In kleineren Datensätzen haben einzelne Ausreisser einen grösseren Einfluss auf die gesamte Streuung der Daten – dies scheint auch hier der Fall zu sein. Allerdings ist mit sinkender Intervalllänge auch ein Anstieg der Mittelwerte der mittleren absoluten Abweichungen mit hoher Korrelation zu den Standardabweichungen zu beobachten.

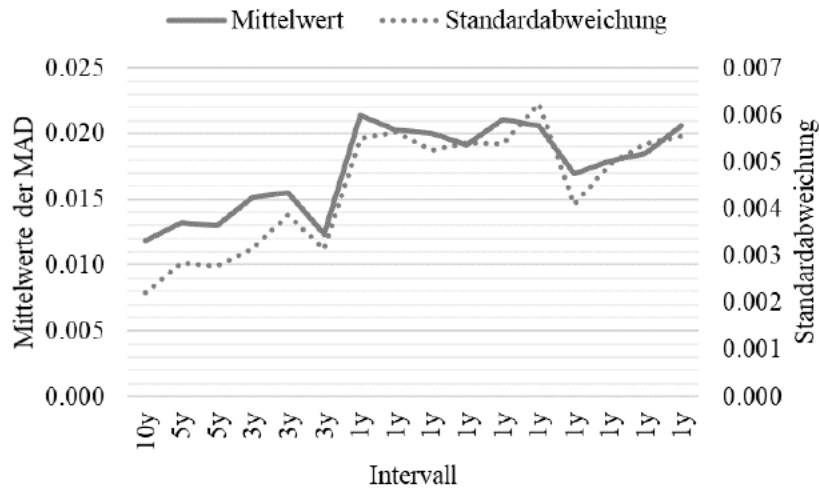


Abbildung 19: Mittelwerte und Standardabweichung der MAD über verschiedene Intervalle, Euro STOXX 50 (eigene Darstellung)

Stärker variierende Mittelwerte würden intuitiv erscheinen, da Ausreisser in kleineren Datensätzen auch bei Mittelwerten stärker ins Gewicht fallen und die Ergebnisse verzerren können, eine steigende Tendenz würde man jedoch wohl nicht unbedingt erwarten. Hier gilt es aber zu berücksichtigen, dass in diesem Fall Mittelwerte von durchschnittlichen Abweichungen von einer erwarteten Verteilung betrachtet werden. Aufgrund des Umstands, dass diese durchschnittlichen Abweichungen *absolut* betrachtet werden, ist zu erwarten, dass die Messgrösse MAD ansteigt, wenn die Abweichungen der ersten Ziffern sowohl gegen oben als auch nach unten grösser werden. Da die ebendiese MAD in kleineren Datensätzen konsistent höher sind als in grösseren, impliziert ein Anstieg dieser Werte nicht gezwungenermassen, dass in den einzelnen Datensätzen viele Ausreisser im Sinne von weit aussen liegenden Datenpunkten enthalten sind, sondern eher, dass bestimmte (oder auch alle) Ziffern in den Datensätzen unter- und/oder überrepräsentiert sind und diese potenziellen Inkonsistenzen bei kürzeren Datenreihen stärker schwanken. In Abbildung 20 ist zu erkennen, dass bei den einjährigen Intervallen die Schwankungsbreite

in der Summe erwartungsgemäss grösser ist als in den längeren Intervallen, dennoch aber nur wenige grössere Ausreisser beobachtet werden können.

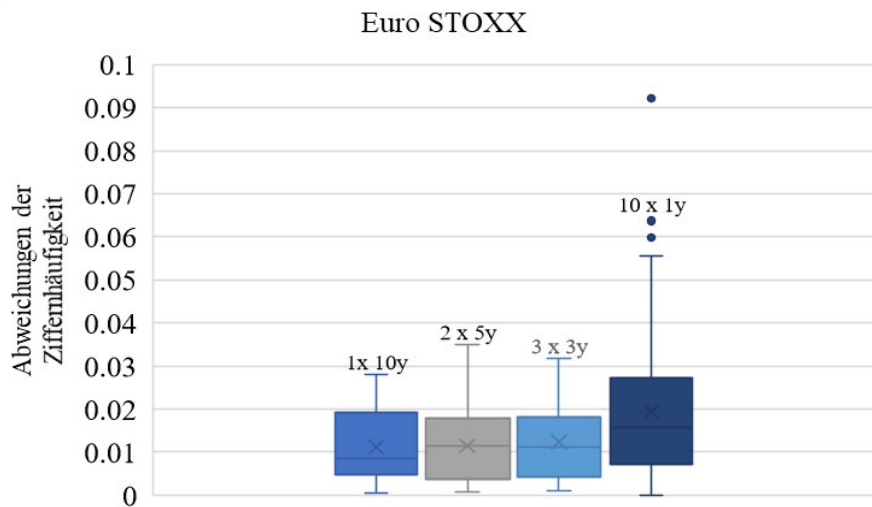


Abbildung 20: Abweichung der erwarteten Ziffernhäufigkeit zur tatsächlichen, alle Intervalle (eigene Darstellung)

Der Umstand der steigenden MAD soll nun genauer untersucht werden, indem im gleichen Datensatz nun die durchschnittlichen tatsächlichen Verteilungen der ersten Ziffern betrachtet werden. Zur Beurteilung dieser Verteilungen wird in jedem Intervall (1 x 10y, 2 x 5y, 3 x 3y und 10 x 1y) nun also die durchschnittliche Abweichung der tatsächlichen Häufigkeit jeder Ziffer zur erwarteten Häufigkeit berechnet, um zu prüfen, ob zwischen den Intervallen eine Konsistenz oder ein Muster beobachtet werden kann (ob also bestimmte Ziffern regelmässig zu oft oder aber zu selten vorkommen). Unterteilt wird anschliessend in die beiden Kategorien "lange Intervalle", welche jene Datensätze umschliesst, die länger sind als ein Jahr und "kurze Intervalle", welche die zehn einjährigen Intervalle berücksichtigt.

Zur Interpretation: Der Wert für die mittlere Abweichung der Ziffer 4 von tatsächlicher zu erwarteter Häufigkeit beträgt in den langen Intervallen -0.0117. Das bedeutet, dass die Ziffer 4 in den Intervallen >1y über alle Basiswerte hinweg im Durchschnitt 1.17% zu selten auftritt, es wird hier also nicht der MAD betrachtet, sondern die Auftrittshäufigkeit der einzelnen Ziffern. Bei dieser Untersuchung wird sichtbar, dass die Abweichung der Häufigkeit der Ziffer 1 im Vergleich zu den anderen Ziffern hervorsteht, sie scheint in allen Datensätzen, unabhängig von der jeweiligen Intervalllänge, überrepräsentiert zu sein; im Durchschnitt tritt die Ziffer 1 in allen Intervallen und für alle Basiswerte ungefähr 3.5% zu oft auf. In Abbildung 21 sind die Abweichungen grafisch dargestellt, die Linien

stehen für die einzelnen Intervalle, die gelb gepunktete Linie entspricht dabei der durchschnittlichen Abweichung der Häufigkeiten über alle Intervalle. Was jedoch auch erkennbar wird, ist, dass die mittleren Abweichungen der Häufigkeiten in den Intervallen, die länger sind als ein Jahr, relativ genau den mittleren Abweichungen in den einjährigen Intervallen entsprechen, vordergründig ist bezüglich der Auftrittswahrscheinlichkeit einzelner Ziffern demnach kein offensichtlicher Unterschied zwischen den Intervalllängen auszumachen. Auf Grundlage der Prämisse, dass grosse Datensets die Benfordsche Verteilung besser approximieren, war dieses Resultat zu erwarten, da in der Summe sowohl in der Kategorie ">1y" als auch in der Kategorie "1y" sehr viele Datenpunkte enthalten sind – dass die Abweichungen über die 10 einjährigen Perioden *im Durchschnitt* also sehr ähnlich sind wie jene der längeren Intervalle überrascht also nicht.

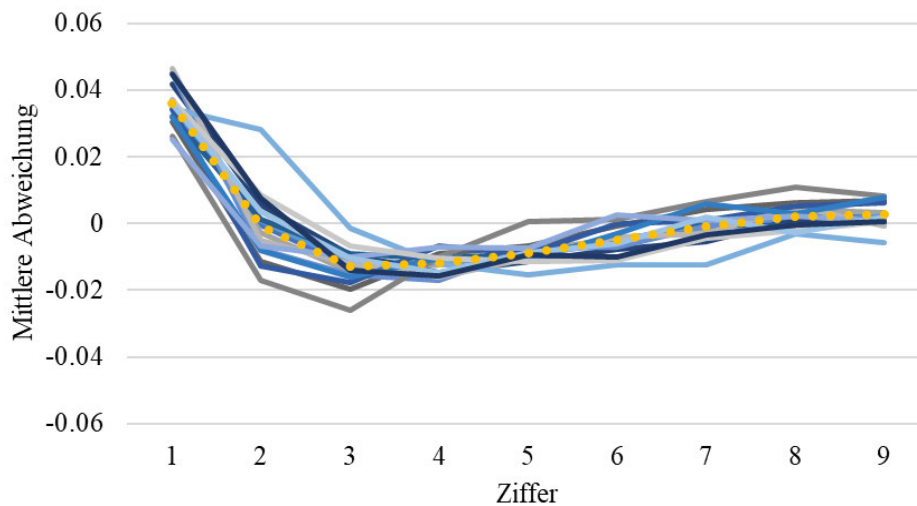


Abbildung 21: Mittlere Abweichung der Häufigkeiten pro Ziffer, Euro STOXX 50 (auf eine Legende wird zur besseren Lesbarkeit verzichtet) (eigene Darstellung)

Es stellt sich also nun die Frage, wie die steigenden MADs bei kürzeren Intervallen zustande kommen. Bei Betrachtung der Standardabweichungen der Abweichungen der Häufigkeiten wird klar, dass die Abweichungen in den einjährigen Intervallen auf jeder Ziffer signifikant höher sind als jene der längeren Intervalle. Das bedeutet, dass die Abweichungen zwischen den einzelnen einjährigen Intervallen (über alle Ziffern im Schnitt um Faktor 2) stärker verstreut sind. Alle Datenpunkte der zehn 1y-Intervalle zusammen erreichen zwar *im Durchschnitt* dieselbe Approximationsgüte wie die längeren Zeiträume, die einzelnen kurzen Intervalle sind jedoch viel weniger konsistent.

Mittlere Abweichung			Standardabweichung	
Ziffer	>1y	1y	>1y	1y
1	0.0354	0.0361	0.0035	0.0071
2	-0.0011	-0.0010	0.0052	0.0126
3	-0.0128	-0.0130	0.0037	0.0063
4	-0.0117	-0.0120	0.0018	0.0036
5	-0.0090	-0.0090	0.0014	0.0039
6	-0.0048	-0.0050	0.0021	0.0050
7	-0.0007	-0.0008	0.0029	0.0052
8	0.0021	0.0020	0.0024	0.0042
9	0.0027	0.0027	0.0022	0.0044

Tabelle 2: Links: Mittlere Abweichung der tatsächlichen Häufigkeit jeder Ziffer zu ihrer erwarteten Häufigkeit. Rechts: Standardabweichung der Abweichungen (eigene Darstellung)

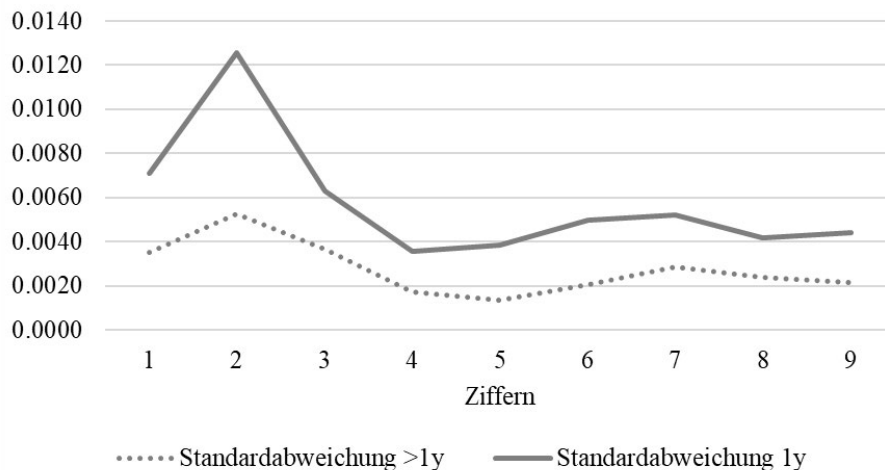


Abbildung 22: Standardabweichung der Abweichungen (eigene Darstellung)

Damit ist nun also bekannt, dass die Approximationsgüte der Verteilung der ersten Ziffern in den kürzeren Datenreihen stärker schwankt und dass grössere Datensätze nicht nur zu tieferen (und damit besseren) MAD führen, sondern auch die Schwankungsbreite der Verteilung der Ziffern abnimmt. Um zu prüfen, ob dieser Sachverhalt auf den Datensatz zurückzuführen ist – hier also relative Tageskursveränderungen des Euro STOXX Index und dessen Konstituenten über 10 Jahre – oder aber inhärent dem Benford'schen Gesetz im Kontext von Tageskursveränderungen zugrunde liegt, wird dieselbe Untersuchung nun auf dem viel umfangreicheren S&P 500 Index wiederholt.

### 3.1.2 S&P 500

Bei der Untersuchung der Verteilung der ersten Ziffer der relativen Tageskurveränderungen des S&P 500 und dessen Konstituenten zeichnet sich ein ähnliches Bild ab. Auch hier gilt grundsätzlich, dass die Approximationsgüte mit zunehmender Datensatzgröße steigt. Auch in diesem Datensatz steigen die mittleren MAD ebenso wie die Standardabweichung an, wenn die Zeiträume verkürzt und damit die Anzahl Datenpunkte verkleinert wird. Wie zuvor im Euro STOXX 50 soll nun untersucht werden, ob sich die steigenden MAD und Standardabweichungen durch eine Über- und Unterrepräsentation bestimmter Ziffern, insbesondere der Ziffer 1, erklären lassen.

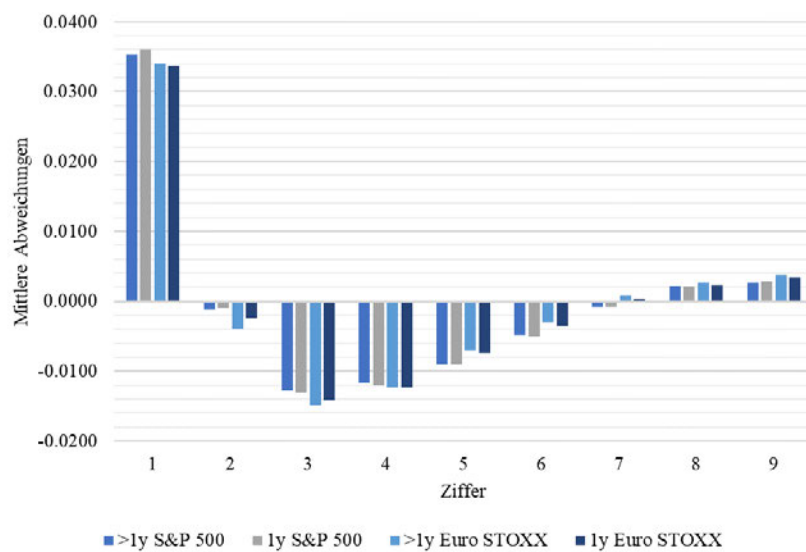


Abbildung 23: Vergleich der mittleren Abweichungen (eigene Darstellung)

Die Resultate sind zwischen S&P 500 und dem Euro STOXX 50 resultieren im selben Bild, auch im S&P 500 ist die Ziffer 1 im Durchschnitt über alle Intervalle zu ungefähr 3.4% überrepräsentiert – die Korrelation der mittleren Abweichungen aus dem Euro STOXX 50 und dem S&P 500 ist signifikant. Diese kann hier nur entstehen, wenn sich die Datenreihen sehr ähnlich bewegen, was bedeutet, dass die Abweichungen nicht nur auf der Ziffer 1, sondern auch auf den anderen Ziffern signifikant ähnlich sind, was in Abbildung 23 erkennbar ist.

Intervall	Start	MAD < 0.015
10y	01.05.2013	86.32%
5y	01.05.2013	58.28%
5y	01.05.2018	71.13%
3y	01.05.2013	39.32%
3y	01.05.2016	54.19%
3y	02.05.2019	57.17%
1y	01.05.2013	11.24%
1y	02.05.2014	14.57%
1y	03.05.2015	18.82%
1y	03.05.2016	22.41%
1y	04.05.2017	21.28%
1y	05.05.2018	23.06%
1y	06.05.2019	29.98%
1y	06.05.2020	14.81%
1y	07.05.2021	12.02%
1y	08.05.2022	12.95%

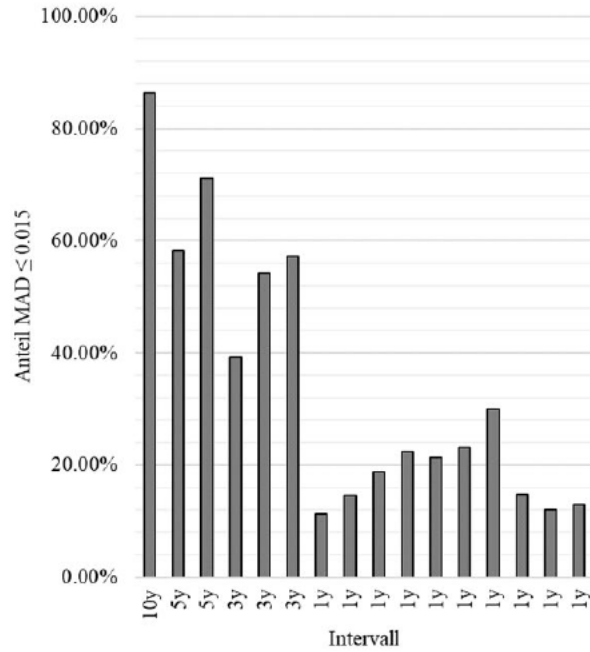


Tabelle 3: Anteil konformer Basiswerte in Intervallen, S&P 500 (eigene Darstellung)

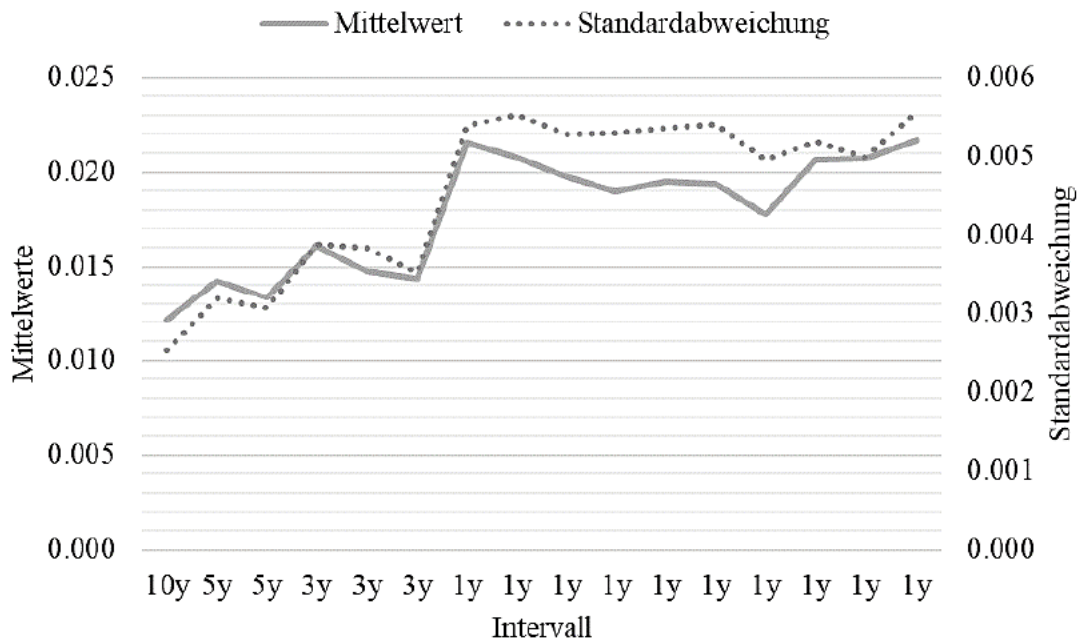


Abbildung 24: Mittelwerte und Standardabweichungen der MAD über verschiedene Zeiträume, S&P 500 (eigene Darstellung)



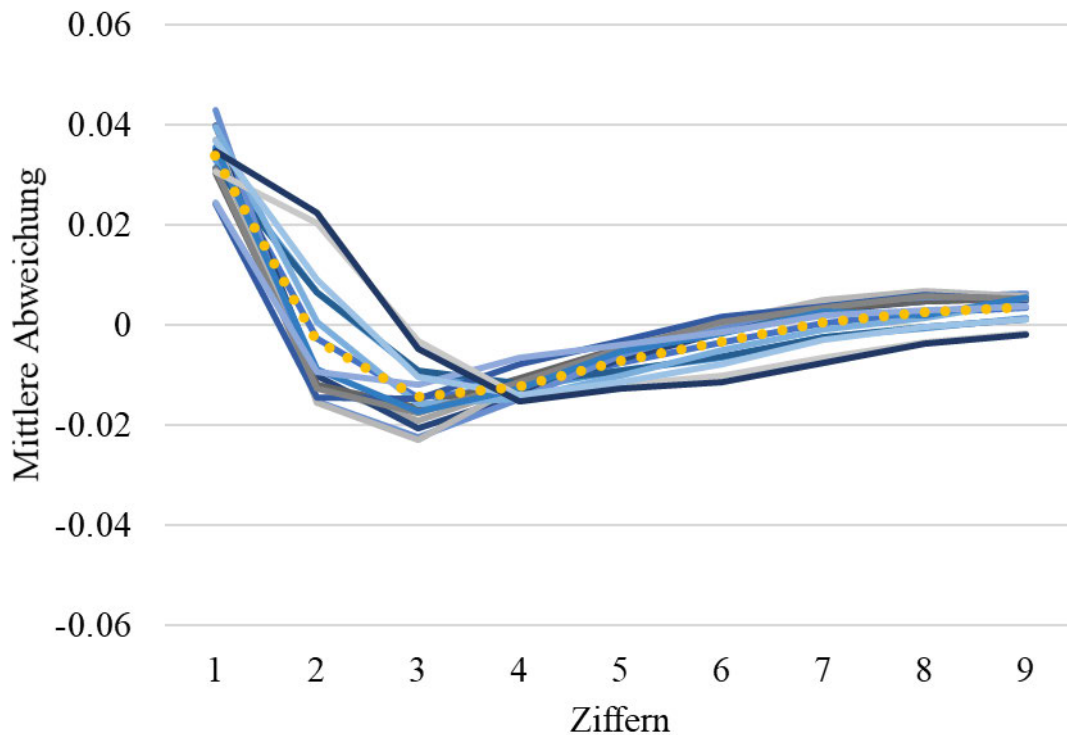


Abbildung 25: Mittlere Abweichung der Häufigkeiten pro Ziffer, S&P 500 (auf eine Legende wird zur besseren Lesbarkeit verzichtet) (eigene Darstellung)

<b>Mittlere Abweichung</b>			<b>Standardabweichung</b>	
Ziffer	>1y	1y	>1y	1y
<b>1</b>	0.0340	0.0337	0.0031	0.0058
<b>2</b>	-0.0040	-0.0024	0.0081	0.0140
<b>3</b>	-0.0149	-0.0141	0.0044	0.0063
<b>4</b>	-0.0123	-0.0123	0.0010	0.0028
<b>5</b>	-0.0071	-0.0074	0.0017	0.0035
<b>6</b>	-0.0029	-0.0035	0.0027	0.0045
<b>7</b>	0.0008	0.0003	0.0026	0.0044
<b>8</b>	0.0027	0.0023	0.0024	0.0037
<b>9</b>	0.0037	0.0033	0.0018	0.0029

Tabelle 4: Links: Mittlere Abweichung der tatsächlichen Häufigkeit jeder Ziffer zu ihrer erwarteten Häufigkeit. Rechts: Standardabweichung der Abweichungen, beide S&P 500 (eigene Darstellung)

Dieser Sachverhalt lässt die Formulierung einiger Vermutungen zu. Einerseits ist die Überrepräsentation der Ziffer 1 und die Verteilung der anderen Ziffern offenbar nicht auf den Euro-STOXX-Datensatz zurückzuführen, sondern auf die Gattung der Daten, hier

also tägliche Aktienkursveränderungen, des Weiteren wird die Prämisse bezüglich der Korrelation zwischen Datensatzgrösse und Konformität zu bestärkt.

Das Resultat lässt hingegen offen, inwiefern die Zeitabschnitte (also nicht die Länge, sondern die zeitlichen Daten) innerhalb der gewählten Intervalle sowie der absolute Zeitraum die Konformität einer Verteilung beeinflussen. Ausserdem ist mittels der bisherigen Untersuchungen nicht beurteilbar, wie sich die Aktien und Indizes in den Intervallen bewegt haben; es ist zu überprüfen, wie sich die Verteilung der Ziffern in Phasen von längeren Auf- und Abwärtsbewegungen der Kurse verändert. In Zeiten erhöhter Volatilität verändern sich Kurse beispielsweise tendenziell stärker – es wäre also denkbar, dass in ruhigen Marktphasen kleine Veränderungen und damit einhergehend tiefere Ziffern öfters auftreten, während in starken Marktbewegungen möglicherweise eher grössere Ziffern wahrscheinlicher werden.

Ausserdem lässt die bisherige Untersuchung keine strukturierte Aussage über die Verteilungen der ersten Ziffern einzelner Basiswerte zu. Zwar kann durchaus beobachtet werden, dass die einzelnen Aktien die Benfordsche Verteilung unterschiedlich rasch approximieren, also unterschiedlich viele Datenpunkte benötigen, um eine mittlere absolute Abweichung innerhalb der Konformitätsgrenze zu erreichen. Während bestimmte Basiswerte innerhalb von ein- oder dreijährigen Intervallen einen MAD-Score unter 0.015 erreichen, benötigen andere fünf- oder zehnjährige Zeiträume, einige erreichen die Konformitätsgrenze in gesamten Zeitraum sogar überhaupt nicht. Aufgrund der statischen Intervalle ist es aber nicht auszuschliessen, dass Marktschwankungen die Resultate beeinflussen – zwar kann ausgesagt werden, welchen MAD-Score eine Aktie innerhalb eines bestimmten, fixen Zeitraums erzielt, nicht jedoch, ob derselbe Score erzielt würde, wenn dieselbe Anzahl Datenpunkte zufällig über den gesamten Zeitraum ausgewählt würden.

Aus diesen Gründen sollen in den folgenden Abschnitten zwei weitere Untersuchungen durchgeführt werden. Im nächsten Abschnitt soll überprüft werden, ob zwischen unterschiedlichen Zeiträumen (also zwischen zeitlichen Daten) bemerkbare Unterschiede bestehen, also ob die Benford-Konformität während bestimmten Zeiträumen besser oder schlechter war als in anderen. Anschliessend werden für unterschiedliche Datensatzgrössen zufällige Kursveränderungen gewählt, um zu prüfen, ob bestimmte Basiswerte konsistent höhere oder tiefere MAD-Scores erzielen.

### 3.1.3 Rollierende mittlere absolute Abweichung

In diesem Abschnitt wird für jeden Basiswert ein rollierender MAD berechnet, das bedeutet, dass das betrachtete Zeitfenster in gleichbleibender Länge über die Zeitreihe wandert. Zweck dieses Verfahrens ist die Überprüfung der Datensätze auf Veränderungen der Benford-Konformität in bestimmten zeitlichen Abschnitten. Es soll überprüft werden, ob neben der Anzahl Datenpunkte auch die Wahl des betrachteten Intervalls einen messbaren Einfluss auf die Konformität hat und damit möglicherweise Hinweise auf bestimmte Einflussfaktoren entstehen – beispielsweise kann so geprüft werden, ob sich die Volatilität des Marktes oder des Basiswerts in der Konformität des Basiswerts bemerkbar macht (auf dieses Konzept wird im Abschnitt 3.1.7 noch vertieft eingegangen). Die Untersuchung wird mit einem einjährigen Zeitfenster durchgeführt, angefangen auf dem Euro-STOXX-Datensatz.

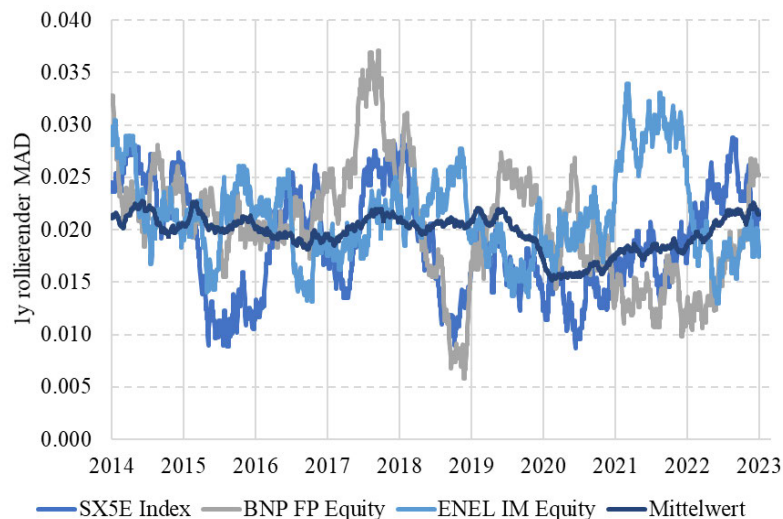


Abbildung 26: Rollierende 1y-MAD einiger Basiswerte und Mittelwert (eigene Darstellung)

Eine erste visuelle Analyse der Ergebnisse weist zwar darauf hin, dass zwischen den Bewegungen der MAD einige Ähnlichkeiten bestehen – so scheinen während des Jahres 2019 beispielsweise viele MAD gesunken zu sein, was auch der Mittelwert nahelegt. Über den gesamten Zeitraum betrachtet ist jedoch keine signifikante Korrelation der Konformität aller Basiswerte festzustellen, nur 33 von gut 1'000 Korrelationen weisen einen Koeffizienten von über 0.5 oder unter -0.5 aus, diese sammeln sich jedoch nicht um die jeweils gleichen Basiswerte. Ebenfalls festzuhalten ist die Tatsache, dass der Mittelwert der rollierenden einjährigen MAD die Konformitätsgrenze nie erreicht. Bei Betrachtung derselben Untersuchung auf dem S&P 500-Datensatz zeichnet sich ein ähnliches Bild ab.

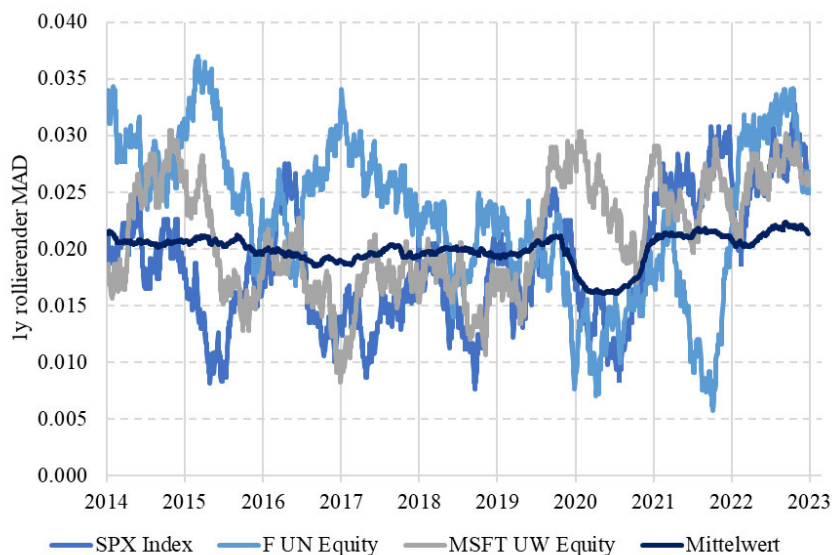


Abbildung 27: Rollierende 1y-MAD einiger Basiswerte und Mittelwert (eigene Darstellung)

Erwähnenswert ist jedoch, dass die Form der Kurve der Mittelwerte (also der durchschnittliche MAD aller Basiswerte) beider Datensätze durchaus Ähnlichkeiten aufweist – der Korrelationskoeffizient dieser beiden Datenreihen liegt bei 0.597, insbesondere gut beobachtbar zwischen 2019 und 2021.



Abbildung 28: Mittelwerte der rollierenden 1y-MAD aller Basiswerte(eigene Darstellung)

Das lässt vermuten, dass die Bewegungen der MAD beider Datensätze nicht zufälliger Natur sind, sondern ein zugrundeliegender Effekt die MAD bewegt. Diese Frage wird im Abschnitt 3.1.7 weiter untersucht.

### 3.1.4 Gleitende mittlere absolute Abweichungen

Um für die im nächsten Abschnitt benötigten zufälligen Stichproben geeignete Stichprobengrößen zu eruiieren, soll im folgenden Abschnitt untersucht werden, wie viele Datenpunkte – nach wie vor tägliche Kursveränderungen – durchschnittlich benötigt werden, damit ein Basiswert eine mittlere absolute Abweichung von  $\leq 0.015$  erreicht. Zu diesem Zweck werden auf dem Euro-STOXX-Datensatz gleitende MAD berechnet ("gleitend" bedeutet hier, dass der Zeitraum und damit die Anzahl Datenpunkte gleitend oder stetig wächst. Im Abschnitt 3.1.3 wurde die Berechnung des MAD rollierend durchgeführt). Zur Demonstration soll an dieser Stelle beispielhaft dargelegt werden, wie der gleitende MAD berechnet werden kann. Die Kursveränderung des Euro STOXX Index vom 30.04.2013 zum 01.05.2013 beträgt  $-0.00959\%$ , damit ist die erste Ziffer eine 9. Sie ist aktuell zudem die einzige Ziffer im Datensatz, hat also eine Häufigkeit von 100%. Die absolute Abweichung der tatsächlichen Häufigkeit zur erwarteten Häufigkeit (4.6%) für die Ziffer 9 beträgt 0.954, die mittlere absolute Abweichung der Häufigkeiten aller Ziffern beträgt 0.212.

Benford - Absolute Abweichung									Rolling MAD
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
30.10%	17.60%	12.50%	9.70%	7.90%	6.70%	5.80%	5.10%	4.60%	
0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.954	0.212

Tabelle 5: Gleitender MAD (1) (eigene Tabelle)

Die nächste Tageskursveränderung beträgt 0.264%, die erste Ziffer ist 2. Sowohl die Ziffer 9 als auch die Ziffer 2 hat eine Häufigkeit von 50%, die mittlere absolute Abweichung der Häufigkeit aller Ziffern beträgt 0.173.

Benford - Absolute Abweichung									Rolling MAD
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
30.10%	17.60%	12.50%	9.70%	7.90%	6.70%	5.80%	5.10%	4.60%	
0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.954	0.212
0.301	0.324	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.454	0.173

Tabelle 6: Gleitender MAD (2) (eigene Tabelle)

Dieses Vorgehen würde nun für jeden Basiswert über den gesamten Zeitraum vom 30.04.2013 bis zum 30.04.2023 fortgeführt. Im realen Datensatz wurde eine kompaktere Vorgehensweise gewählt, im Arbeitsblatt "1st digit" sind wieder die jeweils ersten Ziffern der Veränderungen aufgeführt.

Gleitender MAD eines Basiswerts	Resultat
<p>=WENNFehler(WENN(ISTFEHLER(1st digit!B2);"LEER";(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$1)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$1))/9+(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$2)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$2))/9+(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$3)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$3))/9+(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$4)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$4))/9+(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$5)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$5))/9+(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$6)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$6))/9+(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$7)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$7))/9+(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$8)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$8))/9+(ABS((ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;'Benford's Distribution'!\$A\$9)/(ANZAHL2(1st digit!B\$2:B2)-ZÄHLENWENN(1st digit!B\$2:B2;0)))-'Benford's Distribution'!\$B\$9))/9);""</p> <p>Wiederholung für jede Zelle</p>	0.212

Mittels dieses Vorgehens wird für jeden Basiswert einen gleitenden MAD berechnet. In einem separaten Arbeitsblatt wird für jeden MAD beurteilt, ob er innerhalb der Konformitätsgrenze liegt. Ist das der Fall, wird der Score markiert und die nachfolgenden Scores überprüft. Übersteigt keiner der weiteren Scores den Grenzwert, erhält der Score die Markierung "konform". In diesem Fall verlässt der MAD dieses Basiswerts bis zum Ende der Datenreihe den Konformitätsintervall nicht mehr, der Basiswerte ist ab diesem Zeitpunkt Benford-konform.

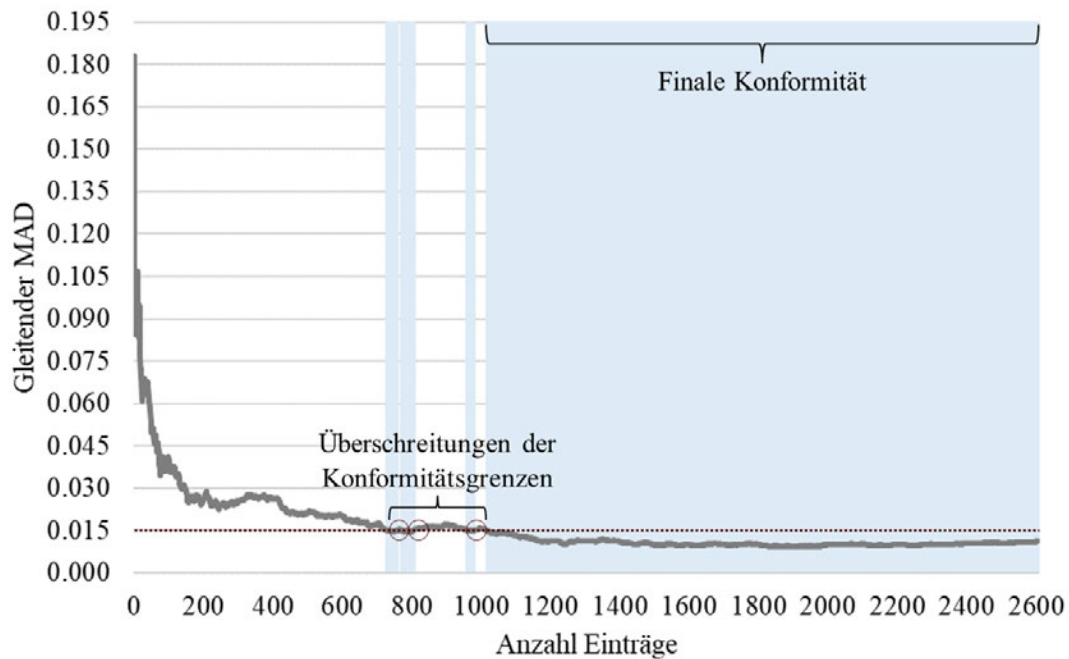


Abbildung 29: Gleitender MAD und Anzahl Einträge zur Konformität am Beispiel von Kursdaten des Euro STOXX 50 Index (eigene Darstellung)

Für jeden Basiswert des Euro STOXX 50 kann so beurteilt werden, wie viele Datenpunkte die jeweilige Aktie in diesem Zeitraum benötigt, um eine Benford-Konformität zu erreichen, natürlich mit der Einschränkung, dass immer zum gleichen Zeitpunkt mit der Messung des gleitenden MAD begonnen wird. Hier ist anzumerken, dass im Sinne der Konsistenz jene Aktien aus der Untersuchung entfernt wurden, für welche nicht für die volle Zeitreihe Kursdaten zur Verfügung stehen, im Euro STOXX betrifft das vier Aktien.

Es resultiert, dass die benötigte Anzahl Schritte zur finalen Konformität ("Konformitätsanforderung") stark variiert (vgl. Abbildung 30), vier Basiswerte erreichen die Konformitätsgrenze in diesem Zeitraum zudem gar nicht oder verlassen sie wieder. Der Median der Konformitätsanforderung liegt bei 1'103 Datenpunkten, die Hälfte der Basiswerte

erreichen einen MAD-Score  $\leq 0.015$  also nach ungefähr drei Jahren. Die gleitenden MAD aller Basiswerte weisen aber grundsätzlich eine ausgeprägte Rechtsschiefe auf.

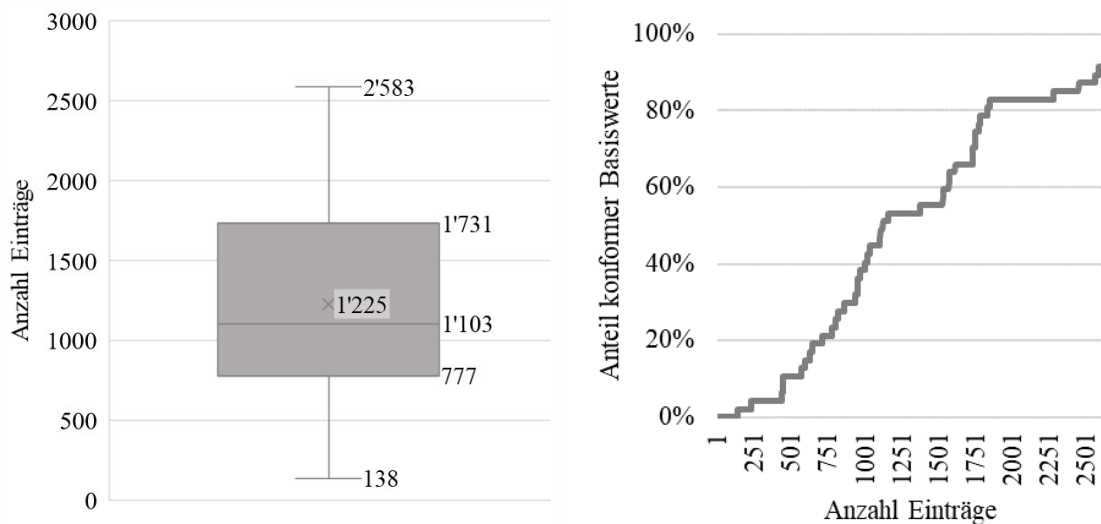


Abbildung 30: Verteilung der Konformitätsanforderungen der Basiswerte (eigene Darstellung)

Da die Berechnung der gleitenden MAD in erster Linie dazu dienen, sinnvolle Stichprobengrößen zu definieren, wird an dieser Stelle aufgrund der bisher beobachteten Ähnlichkeiten und aus zeitlichen Überlegungen darauf verzichtet, dieselbe Untersuchung auf dem S&P 500 durchzuführen.

### 3.1.5 Zufallsstudie

Dank der vorher durchgeführten Untersuchung der gleitenden MAD und der damit einhergehenden Erkenntnisse zur Verteilung der Konformitätsanforderungen ist es nun möglich, aus den Datensätzen mittels mehrerer Iterationen zufällige Stichproben unterschiedlicher, sinnvoller Größen zu entnehmen (mit Zurücklegen) und zu analysieren, wie sich die Verteilung der MAD verändert. Durch dieses Vorgehen soll eruiert werden, ob Basiswerte über verschiedene Datensatzgrößen im Vergleich zu anderen Basiswerten konstant eine bestimmte Approximationsgüte erreichen, entsprechend soll eine Aussage zur Grundgesamtheit der Datenpunkte jedes Basiswerts erreicht werden ("*Bootstrapping*").

Zu diesem Zweck werden in einem neuen Excel-File im ersten Arbeitsblatt wieder alle ersten Ziffern aller täglichen Preisveränderungen aller Basiswerte abgebildet, wie im vorherigen Kapitel werden alle Aktien, deren Preisreihen nicht an den Anfang der Datenreihen zurückreichen, entfernt. So hat jeder Basiswert für den Zeitraum zwischen dem 02.05.2013 bis zum 28.04.2023 2'607 Datenpunkte (der Zeitraum wurde aus



Datenkonsistenzgründen um drei Tage reduziert). In der ersten Spalte wird nun für jedes Datum eine als Index fungierende Zufallszahl zwischen 0 und 1 generiert, Duplikate entstehen dabei keine. Für die Stichprobengrößen  $n = 2000$ ,  $n = 1000$ ,  $n = 500$ ,  $n = 250$  und  $n = 100$  wird nun in je 500 Iterationen ein MAD gerechnet. Zur Demonstration der Berechnung eines einzelnen MAD am Beispiel  $n = 2000$  für Aktie von Anheuser-Busch (ABI BB):

	A	B
1	n ohne 0	1'966
2	MAD	0.01237346
3	k-grösste Zufallszahl	ABI BB Equity
4	2000	5
5	1999	4
6	1998	1
7	...	...
2001	3	2
2002	2	4
2003	1	7

Abbildung 31: Beispiel für Stichprobe (eigene Darstellung)

In der Spalte A wird hier die jeweils  $k$ -grösste Zufallszahl, die in den Zufallszahlen im Arbeitsblatt "Extraction" gesucht werden soll, eingegeben, für  $n = 2000$  also alle Zahlen absteigend von 2'000 bis 1. Mittels der SVERWEIS-Funktion wird nun die Spalte A in "Extraction" nach der jeweils  $k$ -grössten Zufallszahl durchsucht und die korrespondierende Ziffer in Spalte B dargestellt. B1 berechnet die relevante Menge, also alle Nichtnull, in B2 wird der MAD ausgegeben. Das Resultat wird gesondert gespeichert, anschliessend werden neue Zufallsziffern generiert und der Vorgang wird wiederholt, bis 500 Iterationen erreicht sind.

SVERWEIS von Zufallszahl zur Ziffer	Resultat
=SVERWEIS(KGRÖSSTE("Extraction"!\$A:\$A;\$A4);"%!"\$A:\$AW;SPALTE(D1);FALSCH)	5

Berechnung des MAD	Resultat
$  \begin{aligned}  &= (\text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s Distribution''!\$B1})/\text{C1-} \\  &\text{'Benford''s Distribution''!\$A1}) + \text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s} \\  &\text{Distribution''!\$B2})/\text{C1-} \text{'Benford''s} \\  &\text{Distribution''!\$A2}) + \text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s Distribution''!\$B3})/\text{C1-} \\  &\text{'Benford''s Distribution''!\$A3}) + \text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s} \\  &\text{Distribution''!\$B4})/\text{C1-} \text{'Benford''s} \\  &\text{Distribution''!\$A4}) + \text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s Distribution''!\$B5})/\text{C1-} \\  &\text{'Benford''s Distribution''!\$A5}) + \text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s} \\  &\text{Distribution''!\$B6})/\text{C1-} \text{'Benford''s} \\  &\text{Distribution''!\$A6}) + \text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s Distribution''!\$B7})/\text{C1-} \\  &\text{'Benford''s Distribution''!\$A7}) + \text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s} \\  &\text{Distribution''!\$B8})/\text{C1-} \text{'Benford''s} \\  &\text{Distribution''!\$A8}) + \text{ABS}(\text{ZÄHLENWENN}(\text{C}\$4:\text{C}\$2003; \text{'Benford''s Distribution''!\$B9})/\text{C1-} \\  &\text{'Benford''s Distribution''!\$A9}))/9  \end{aligned}  $	0.0123

Mittels eines VBA-Makros wird dieser Vorgang nun für jeden Basiswert und jedes  $n$  in 500 Iterationen wiederholt, die Zufallszahl in "Extraction" wird dabei jedes Mal neu generiert und referenziert daher eine andere Ziffer. Jedes Resultat wird dabei in eine separate Datei geschrieben, wo für jeden Basiswert und jedes  $n$  der mittlere MAD berechnet wird. Durch diesen Vorgang werden für den Euro STOXX 50 117'500 einzelne MAD generiert, für den S&P 500 wurde die Anzahl Iterationen aufgrund der grossen Anzahl Basiswerte auf 100 reduziert, wodurch 218'00 MAD generiert werden.

Makro Wahl zufälliger Tageskursveränderungen, 500 Iterationen für jedes $n$
<pre> Sub Copypaste_large() Application.Calculation = xlManualDim i  For i = 1 To 500     Calculate     Sheets("n=2000").Select     Range("B2").Select     Range(Selection, Selection.End(xlToRight)).Select     Selection.Copy </pre>

```

Windows("SX5E Stichproben Metrics.xlsm").Activate
Sheets("sn=2000").Select
Range("A" & Rows.Count).End(xlUp).Offset(1).Select
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
:=False, Transpose:=False
Windows("SX5E Stichproben.xlsm").Activate

Sheets("n=1000").Select
Range("B2").Select
Range(Selection, Selection.End(xlToRight)).Select
Selection.Copy
Windows("SX5E Stichproben Metrics.xlsm").Activate
Sheets("sn=1000").Select
Range("A" & Rows.Count).End(xlUp).Offset(1).Select
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
:=False, Transpose:=False
Windows("SX5E Stichproben.xlsm").Activate

Sheets("n=500").Select
Range("B2").Select
Range(Selection, Selection.End(xlToRight)).Select
Selection.Copy
Windows("SX5E Stichproben Metrics.xlsm").Activate
Sheets("sn=500").Select
Range("A" & Rows.Count).End(xlUp).Offset(1).Select
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
:=False, Transpose:=False
Windows("SX5E Stichproben.xlsm").Activate

Sheets("n=250").Select
Range("B2").Select
Range(Selection, Selection.End(xlToRight)).Select
Selection.Copy
Windows("SX5E Stichproben Metrics.xlsm").Activate
Sheets("sn=250").Select
Range("A" & Rows.Count).End(xlUp).Offset(1).Select
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
:=False, Transpose:=False

```

```
Windows("SX5E Stichproben.xlsm").Activate

Sheets("n=100").Select
Range("B2").Select
Range(Selection, Selection.End(xlToRight)).Select
Selection.Copy
Windows("SX5E Stichproben Metrics.xlsm").Activate
Sheets("sn=100").Select
Range("A" & Rows.Count).End(xlUp).Offset(1).Select
Selection.PasteSpecial Paste:=xlPasteValues, Operation:=xlNone, SkipBlanks _
:=False, Transpose:=False
Windows("SX5E Stichproben.xlsm").Activate
Next i
Application.Calculation = xlAutomatic
End Sub
```

### 3.1.5.1 Zufallsstudie: Resultate Euro STOXX 50

Bei Betrachtung der Ergebnisse dieser Untersuchung wird erkennbar, dass grundsätzlich weiterhin für alle Basiswerte gilt, dass ihre Approximationsgüte mit wachsenden  $n$  steigt, das war vor dem Hintergrund der vorherigen Untersuchungen zu erwarten. Ebenfalls zu erwarten ist, dass Basiswerte, welche über den gesamten Datensatz keine Benford-Konformität erreichen konnten, auch in der Untersuchung mit Zufallswerten schlechter abschneiden (aufgrund der Korrelation zwischen Datensatzgröße und Konformität), auch wenn einzelne MAD die Konformität erreichen können. Erwähnenswert ist, dass die Resultate aus der Zufallsstudie mit jenen aus dem "realen" Datensatz konsistent sind; hat ein Basiswert im realen Datensatz eine hohe Approximationsgüte, weist er dies auch in der Studie aus und umgekehrt (im Abschnitt 3.1.5.3 wird auf das potenzielle Vorliegen eines "Selection Bias" eingegangen). Im Zentrum der Durchführung dieser Zufallsstudie steht jedoch die Frage, ob die Resultate durch die vorher angewandten statischen Intervalle beeinflusst werden oder aber Basiswerte die Benfordsche Verteilung in einer Form "inhärent" besser oder schlechter approximieren.

Tatsächlich legt Abbildung 32 nahe, dass die Approximationsgüte nicht vom Intervall, sondern vom Basiswert abhängig ist. Die Approximationsgüte der einzelnen Basiswerte bleibt im Vergleich zu jener anderer Basiswerte relativ konstant. Ist der durchschnittliche MAD-Score eines Basiswert für ein  $n$  tiefer als jener anderer Basiswerte, scheint der durchschnittliche MAD-Score grundsätzlich auch für die anderen  $n$  tiefer (und damit besser) zu sein.

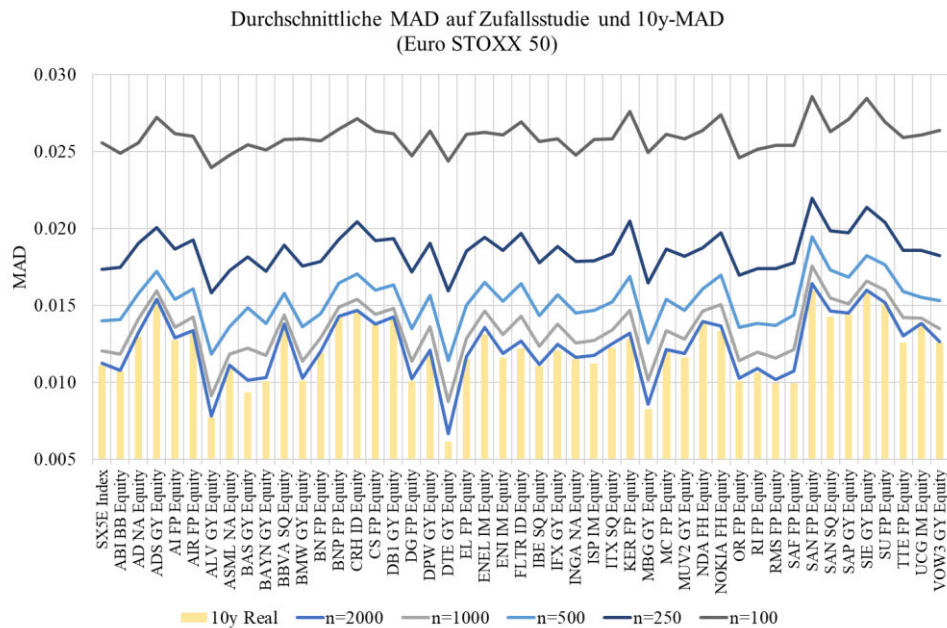


Abbildung 32: Zufallsstudie und reale Daten, Euro STOXX (eigene Darstellung)

Dieser Umstand legt die Erstellung einer Rangliste nahe. Es soll überprüft werden, wie sich die Approximationsgüten eines Basiswerts zu den anderen verhält, also wie stark die Ränge eines Basiswerts für die verschiedenen  $n$  korrelieren. Die Korrelationsanalyse der mittleren MAD bestätigt die Annahme, dass die Approximationsgüte in den verschiedenen Intervallen von den Basiswerten abhängt, die Werte sprechen für einen ausgeprägten statistischen Zusammenhang. In Abbildung 33 ist der Zusammenhang grafisch dargestellt (zur Interpretation: Der niedrigste MAD pro  $n$  erzielt in diesem  $n$  den ersten Rang, der zweitniedrigste den zweiten Rang etc.). Betrachtet man nun jene Aktien, die in der Zufallsstudie das Benfordsche Gesetz am besten annähern und vergleicht deren Approximationsgüte aus dem 10-jährigen Intervall des realen Datensatzes mit jener der "schlechtesten" Aktien aus der Zufallsstudie, bestätigt sich die Aussage, dass sich die Resultate aus dem realen Datensatz in die Studie übertragen. Erkennbar wird ausserdem, dass auch hier die Häufigkeit der Ziffer 1 ausschlägt, bei Basiswerten mit schlechten MAD scheint dies besonders ausgeprägt zu sein (vgl. Abbildung 34).

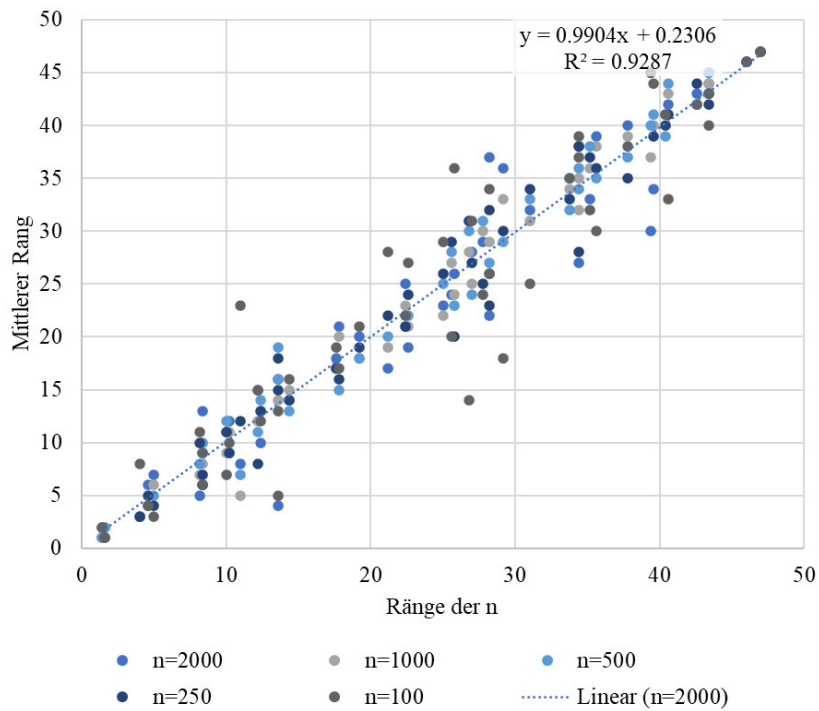


Abbildung 33: Ränge der Approximationsgüten für n, sortiert nach durchschnittlichem Rang (eigene Darstellung)

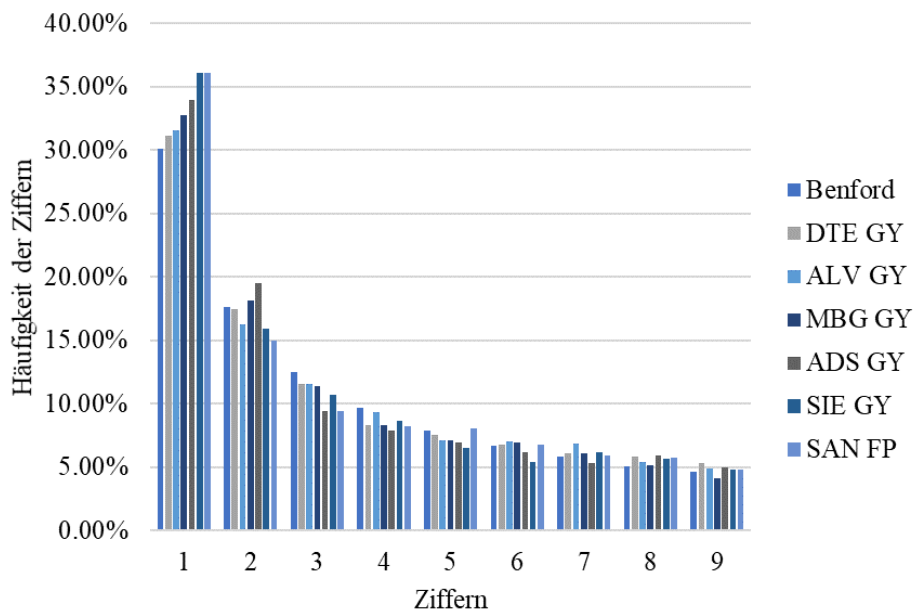


Abbildung 34: Vergleich zwischen den besten und den schlechtesten Basiswerten aus der Studie anhand ihrer realen 10y-MAD (eigene Darstellung)

### 3.1.5.2 Zufallsstudie: Resultate S&P 500

Dieselbe Studie, aber mit weniger Iterationen (100 statt 500) wurde auch für den S&P 500 und dessen Konstituenten durchgeführt. Die Resultate sind jenen aus der Studie für den Euro STOXX 50 sehr ähnlich, auch hier kann ein signifikanter Zusammenhang zwischen den Rängen der Approximationsgüten der Basiswerte über die verschiedenen  $n$  festgestellt werden, wobei zu erwähnen ist, dass die Korrelationen der Ränge insbesondere für  $n = 100$  etwas niedriger sind, als dies im Euro STOXX 50 der Fall war, allenfalls liesse sich das durch die niedrige Anzahl Iterationen im S&P 500 sowie die grössere Anzahl Basiswerte erklären.

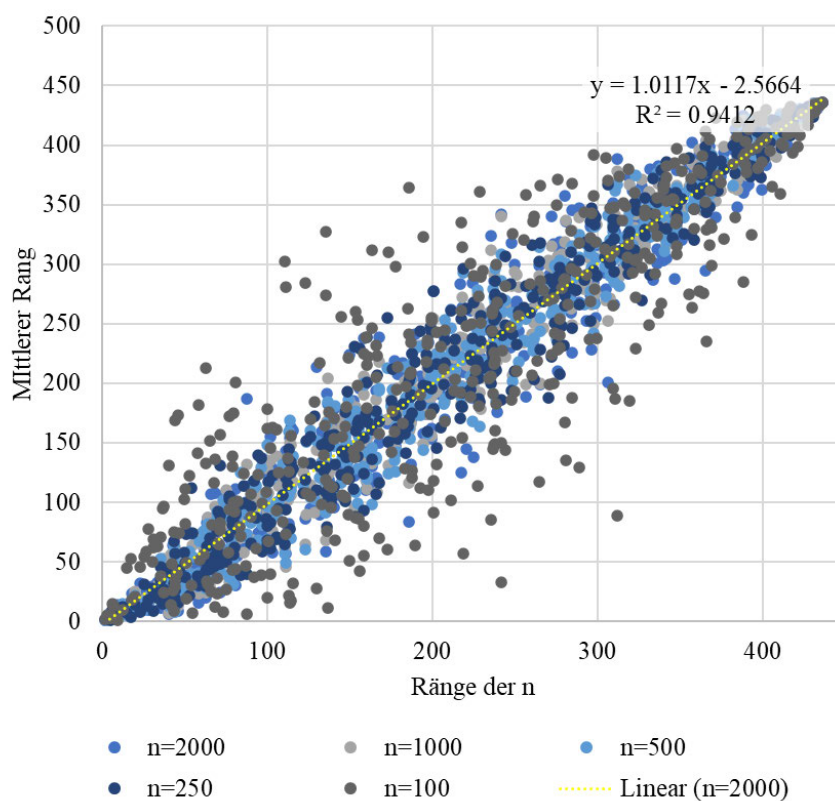


Abbildung 35: Ränge der Approximationsgüten für  $n$ , sortiert nach mittlerem Rang (eigene Darstellung)

Sowohl für den Euro STOXX 50 als auch für den S&P 500 wurde in beiden Zufallsstudien gezeigt, dass die MAD-Scores offenbar nicht zufällig über die  $n$  und über die Basiswerte verteilt wurden.

### 3.1.5.3 Selection Bias

Da sämtliche Datenpunkte aus denselben Datensätzen (tägliche Kursveränderungen der Konstituenten der Indizes) stammen, kann nicht mit Sicherheit ausgeschlossen werden, dass dem Datensatz Konditionen zugrunde liegen, welche die Resultate beeinflussen. Es wäre beispielsweise möglich, dass makroökonomische Gegebenheiten wie das Zinsumfeld oder die Inflation die Verteilung der Ziffern verändern. Auch wenn dies unwahrscheinlich scheint, wird an dieser Stelle eine weitere Zufallsstudie durchgeführt, um die Reliabilität des Resultates zu überprüfen. Es wird für beide Datensätze für je sechs Aktien ein mehr als verdoppelter Zeitraum (01.05.2000 – 28.04.2023) betrachtet und mit je 100 Iterationen für dieselben  $n$  MADs generiert, deren Durchschnitt anschliessend mit jenen aus den vorherigen Zufallsstudien verglichen werden. Gewählt werden die jeweils die Aktien mit hoher und Aktien mit niedriger Konformität gemäss Ranking in der Zufallsstudie. Dabei zeichnet sich ab, dass das Verhältnis grundsätzlich immer noch stimmt; die "besseren" Aktien bleiben besser, die weniger konformen bleiben ebenso weniger konform. Es gilt zu berücksichtigen, dass die MAD hier zu Vergleichszwecken durchschnittlich über alle  $n$  betrachtet werden, wodurch der Eindruck geringer Konformität entsteht. Tatsächlich ist das auf die hohen MAD aus den kurzen  $n$  zurückzuführen, die das durchschnittliche Resultat spürbar beeinflussen.

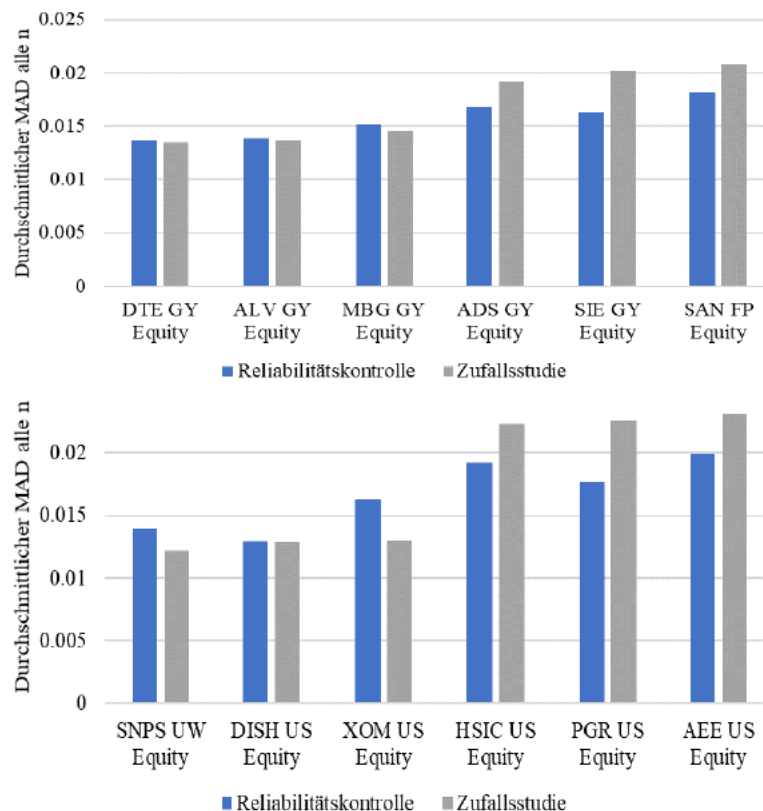


Abbildung 36: Zufallsstudie gegen Überprüfung (eigene Darstellung)



### 3.1.6 Andere Indizes und Intervalle

Es ist nicht auszuschliessen, dass die bisher erzielten Resultate und die Struktur der Konformität auf den gewählten Zeitraum der Datensätze zurückzuführen ist, insbesondere die stark erhöhte Volatilität Anfang des Jahres 2020 könnte die Resultate beeinflussen. Ausserdem wurden bisher nur tägliche Kursveränderungen berücksichtigt. Aus diesem Grund sollen in diesem Abschnitt andere Basiswerte in anderen Zeiträumen und andere Intervallarten betrachtet werden. Damit soll beurteilt werden, ob Aktien und Indizes dem Benford'schen Gesetz auch dann folgen, wenn andere Daten gewählt werden.

#### 3.1.6.1 Internationale Indizes über 23 Jahre

In diesem Unterabschnitt wird mittels analogen Vorgehens wie in der Zufallsstudie (Abschnitt 3.1.5) zufällig Tageskursveränderungen aus dem Intervall 30.04.2000 bis 30.04.2023 gewählt ( $n = 5000, n = 2500, n = 1000, n = 500, n = 250, n = 100$ ). In Tabelle 7 sind die dabei berücksichtigten Indizes aufgeführt. Zu erwähnen ist, dass nicht nur Aktienindizes überprüft werden, sondern auch die beiden Volatilitätsindizes VIX und V2X berücksichtigt werden. Pro  $n$  und pro Basiswert werden 100 Iterationen durchgeführt.

Basiswert	Bloomberg-Name	Land/Region
SPX Index	S&P 500 INDEX	USA
NDX Index	NASDAQ 100 STOCK INDX	USA
INDU Index	DOW JONES INDUS. AVG	USA
SX5E Index	Euro STOXX 50 Pr	Europa
SMI Index	SWISS MARKET INDEX	Schweiz
DAX Index	DAX INDEX	Deutschland
HSI Index	HANG SENG INDEX	Hong Kong
NIFTY Index	NIFTY 50	Indien
IBOV Index	BRAZIL IBOVESPA INDEX	Brasilien
MDAX Index	MDAX PERF INDEX	Deutschland
SPI Index	SPI SWISS PERFORMANCE IX	Schweiz
CAC Index	CAC 40 INDEX	Frankreich
UKX Index	FTSE 100 INDEX	Grossbritannien
XU100 Index	BIST 100 INDEX	Türkei
VIX Index	CBOE Volatility Index	USA
V2X Index	VSTOXX Index	Europa

Tabelle 7: Indizes für zufällige Tageskursveränderungen (eigene Darstellung)

Das entstehende Bild entspricht grundsätzlich auch jenen aus den Resultaten zum S&P 500 und zum Euro STOXX 50 insofern, als das eine Konstanz beobachtbar ist, ist die Konformität eines Index für ein beliebiges  $n$  höher als die Konformität anderer Indizes, so gilt das auch für die anderen  $n$ . Das Bild der Verteilung der MAD aus der Zufallsstudie entspricht wie auch bei den vorherigen Untersuchungen auch jenem aus dem realen Datensatz. Erwähnenswert ist ausserdem, dass sowohl der VIX als auch der V2X die Konformität auch bei grossen  $n$  nicht erreichen – deren täglichen relativen Veränderungen sind in diesem Datensatz also nicht Benford-verteilt.

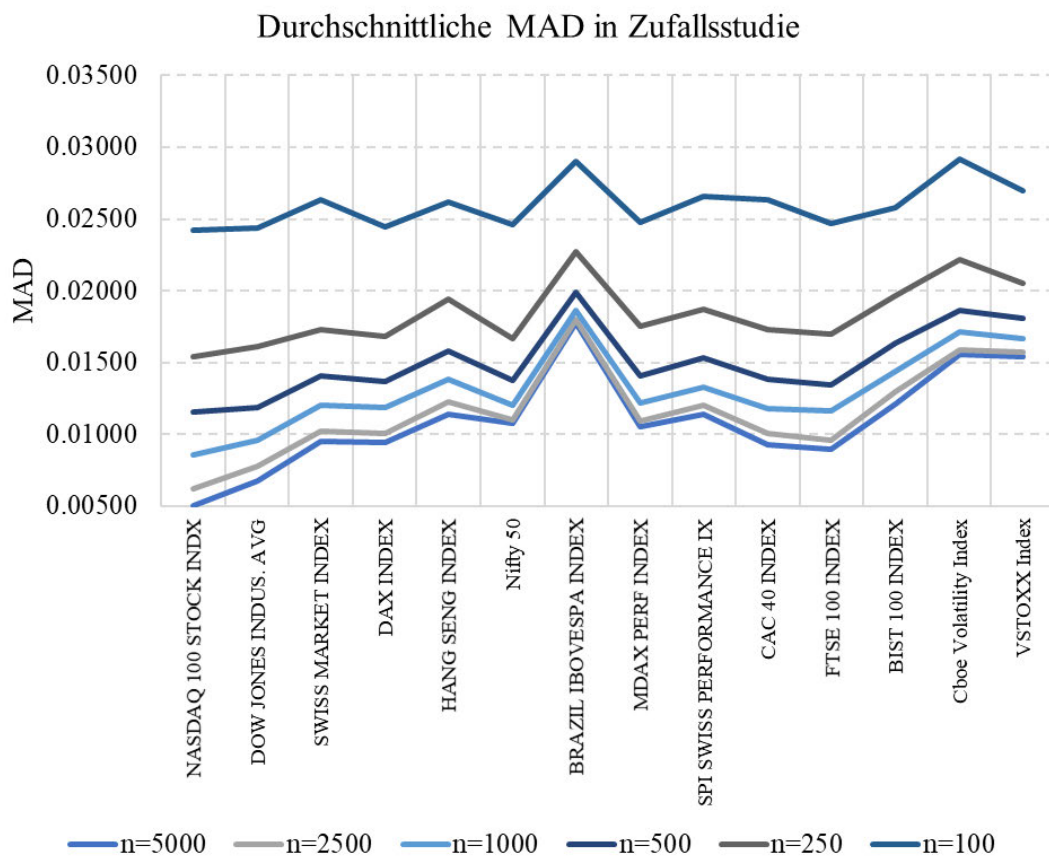


Abbildung 37: Durchschnittliche MAD-Scores der Indizes in der Zufallsstudie (eigene Darstellung)

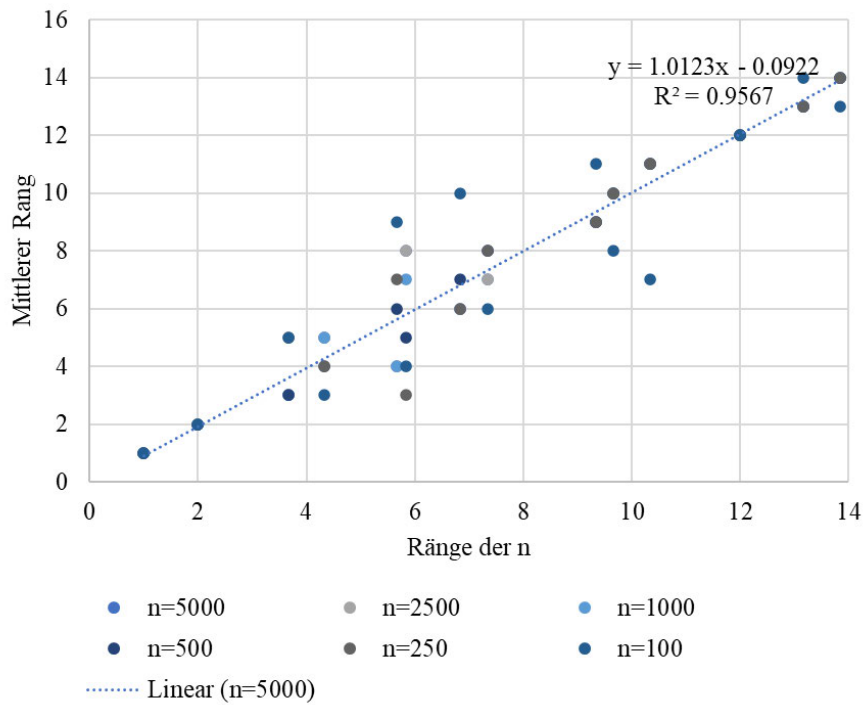


Abbildung 38: Ränge der Approximationsgütern für  $n$ , sortiert nach mittlerem Rang (eigene Darstellung)

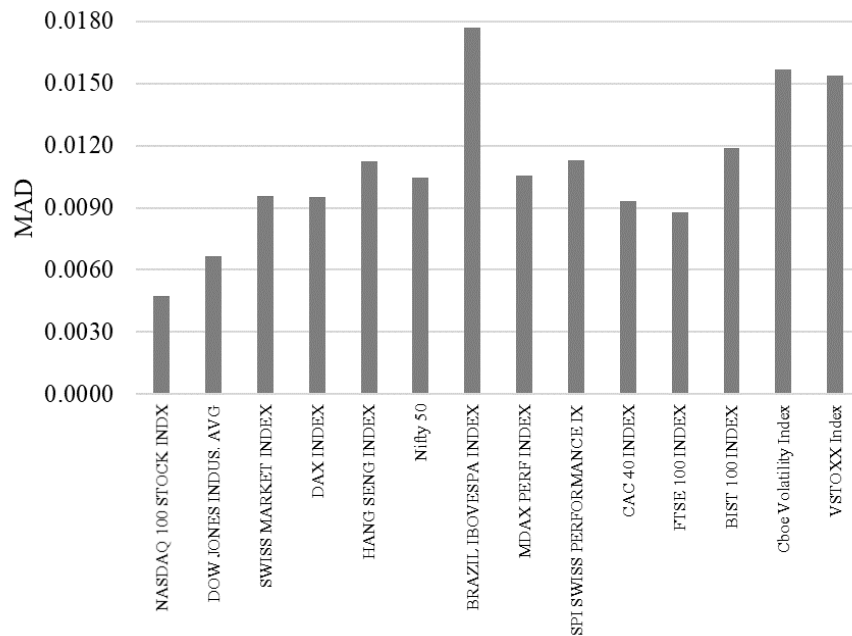


Abbildung 39: Verteilung der MAD über den gesamten Datensatz (2000 - 2023) (eigene Darstellung)

### 3.1.6.2 Amerikanische Indizes, wöchentliche Daten ab 1930

In diesem Datensatz wird der S&P 500 und der Dow Jones Index und deren wöchentlichen Kursveränderungen ab 1930 betrachtet. Der Grundgedanke zur Wahl der Intervalle bezieht sich hier auf die Erwartung, dass die Schwankung zwischen wöchentlichen Kursen höher ist als jene zwischen täglichen Kursen, entsprechend also eher mehr höhere Ziffern erwartet würden. Tatsächlich aber ist dem nicht so. Nach wie vor ist die Ziffer 1 überrepräsentiert, beim S&P 500 über diesen Zeitraum sogar so stark, dass der Index die Konformitätsgrenze verlässt; der MAD des S&P 500 für wöchentliche Kursveränderungen zwischen 1930 und 2023 liegt bei 0.0151, also äusserst knapp über dem Konformitätsmaximum, jener des Dow Jones bei 0.013 (vgl. Abbildung 51 im Anhang).

### 3.1.7 Volatilität und Verteilung der Tageskursveränderungen

Im Kontext von Finanzmärkten ist Volatilität ein sehr bedeutsames Konzept. Sie misst das Ausmass oder die Intensität von Schwankungen von Wertpapierpreisen um den eigenen Mittelwert innerhalb einer bestimmten zeitlichen Periode. Marktteilnehmer nutzen Volatilität als Kennzahl unter anderem zur Risikomessung und zur Portfoliokonstruktion, ausserdem ist sie einer der wichtigsten Preisbestimmungsfaktoren für Derivate-Pricing. Mit steigender Volatilität erhöht sich grundsätzlich das Anlagerisiko, da die Preisschwankungen eines Wertpapiers zunehmen. Es existieren verschiedene Methoden zur Messung der Volatilität eines Wertpapiers, in dieser Arbeit wird, wo nicht anders erwähnt, die annualisierte Standardabweichung relativer Kursänderungen verwendet.

Wie eingeführt schwanken Wertpapierpreise bei erhöhter Volatilität stärker. Hinsichtlich Konformität zum Benfordschen Gesetz könnte also davon ausgegangen werden, dass sich die ersten Ziffern relativer Tageskursveränderungen volatilerer Aktien anders verhalten und sie entsprechend weniger konform sind als jene, die weniger stark schwanken. In den Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2 wurde veranschaulicht, dass die Ziffer 1 im Durchschnitt überrepräsentiert ist. Hier wird nun untersucht, ob sich das auch so verhält, wenn die Aktien nach ihrer Volatilität kategorisiert werden. Zur Kategorisierung der Basiswerte wird die 162-wöchige (gut 3-jährige), annualisierte Volatilität verwendet. Da die Volatilität hier nur zu Klassifikationszwecken verwendet wird, wird der Wert statisch gehalten (er soll lediglich ein Hinweis dahingehend geben, ob ein Basiswert eher stark oder eher schwach schwankt). Die Basiswerte werden abhängig von ihrer Volatilität in fünf gleich

grosse Kategorien eingeteilt (tiefe Volatilität, tief-mittel, mittel, mittel-hoch, hohe Volatilität), anschliessend wird die durchschnittliche Verteilung der ersten Ziffern der Kursveränderungen der Basiswerte zwischen den Kategorien verglichen. Diese Ziffern werden in Intervallen unterteilt, welche sich auf ihre Grössenordnung beziehen (0.00x%, 0.0x%, 0. x% etc.). Dadurch soll visualisiert werden, wie stark die Tageskurse schwanken. Diese Untersuchung wird aufgrund der grösseren Anzahl Basiswerte im Datensatz zum S&P 500 über den gesamten Zeitraum durchgeführt. Betrachtet wird zunächst die Verteilung der Tageskursveränderungen des gesamten Datensatzes.

Dabei wird erkennbar, dass über 25% aller täglichen Kursveränderungen im Intervall [1%; 2%[ verortet sind. Angesichts der Tatsache, dass die Ziffer 1 im Kontext des Benfordschen Gesetzes durchschnittlich überrepräsentiert ist, überrascht es wenig, dass das auch hier der Fall ist, dennoch ist die Verteilung über die Intervalle interessant. Sichtbar wird, dass der Grossteil aller Veränderungen im Intervall [0.1%; 10%[ stattfindet, jedoch weder im Intervall 0. x% noch im Intervall x. 0% eine Benfordsche Verteilung beobachtet werden kann; bei den kleineren Veränderungen ist die Steile der Verteilung der Ziffern weniger ausgeprägt, die Häufigkeit ist ausgeglichener als bei den grösseren Änderungen, wo die Ziffer 1 klar dominiert und die Verteilung danach stark abfällt.

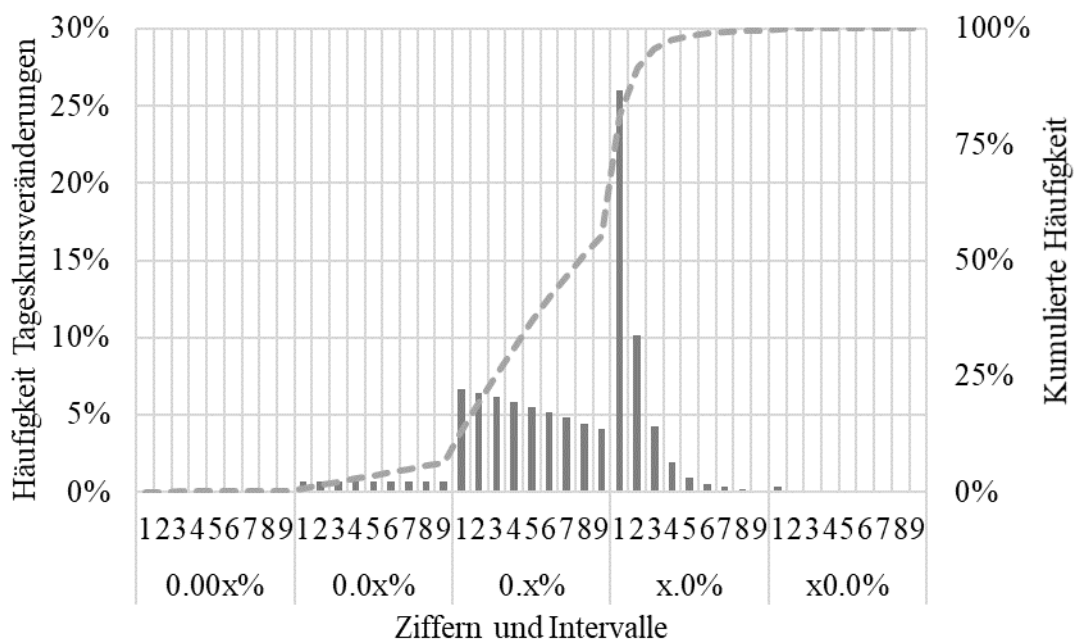


Abbildung 40: Verteilung der ersten Ziffern der Tageskursveränderungen nach Intervallen (eigene Darstellung)

Bei Betrachtung der durchschnittlichen Verteilung der ersten Ziffern in den definierten Volatilitätskategorien ist festzustellen, dass diese zwar eine ähnliche Form aufweisen, jedoch ist ein distinkter Unterschied erkennbar. Die Steile der Verteilung ist insbesondere im Intervall  $0.x\%$  abhängig von der Volatilität der in der Kategorie enthaltenen Basiswerte, je volatiler die Kategorie, desto flacher die Verteilung innerhalb dieses Intervalls (vgl. Abbildung 41 und folgende). Das bedeutet, dass höhere Ziffern – der Vermutung gemäss – öfters im Intervall vorkommen, je höher die Volatilität der Basiswerte ist, die Steile der Verteilung also mit steigender Volatilität abnimmt. Auch ist zu beobachten, dass die kumulierte Häufigkeit jeder Ziffer in Relation zum gesamten Datensatz des Basiswerts mit steigender Volatilität sinkt, was bedeutet, dass mehr Tagesveränderungen in einem anderen Intervall verortet sind, je höher die Volatilität des Basiswerts ist (jede Ziffer kommt Intervall in diesem Intervall Häufigkeit der Ziffern öfter vor, je tiefer die Volatilität ist). Ebenfalls erwähnenswert ist die Tatsache, dass im Intervall zwar keine Benfordsche Verteilung festgestellt werden kann, die Form der Verteilung aber für jede Ziffer und jede Volatilitätskategorie insofern konsistent ist, als dass jede Ziffer seltener vorkommt als die vorherige.

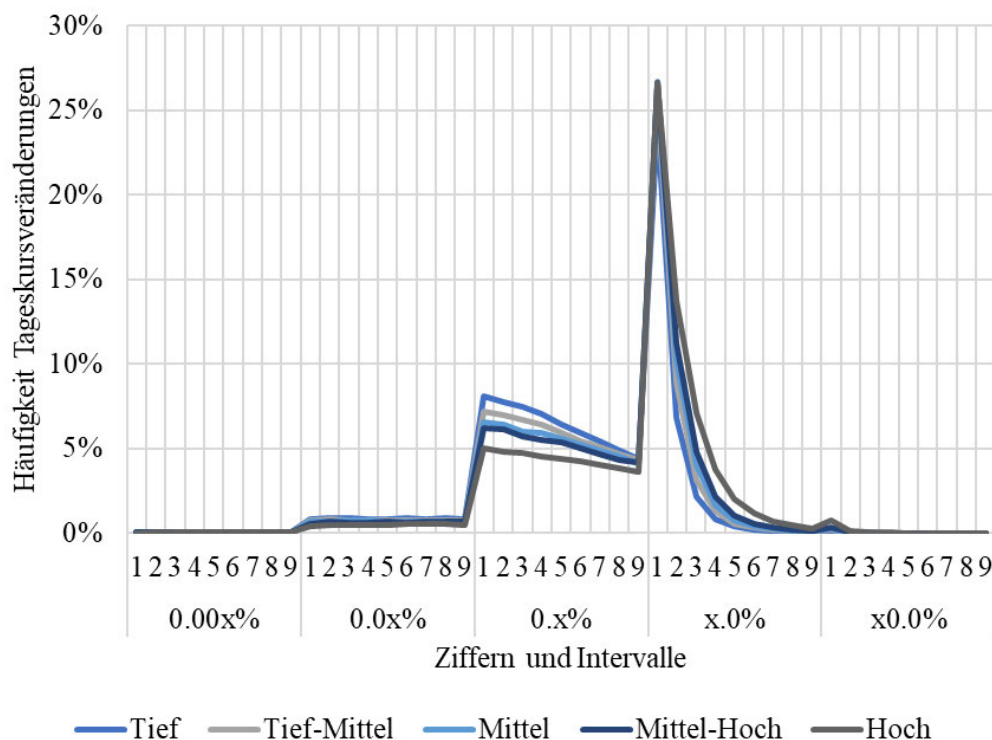


Abbildung 41: Häufigkeit der Tagesveränderungen in Intervallen, kategorisiert nach Volatilität (eigene Darstellung)

Anders verhält es sich im Intervall  $x.0\%$ , zwar nimmt die Steile der Verteilung mit steigender Volatilität auch hier ab; die kumulierte Häufigkeit nimmt in diesem Intervall jedoch mit steigender Volatilität zu – die im vorherigen Intervall "fehlenden" Datenpunkte der volatileren Aktien befinden sich also im nächstgrösseren Intervall. Das erscheint intuitiv, da Basiswerte mit stärkeren Schwankungen öfter Kursveränderungen  $\geq 1\%$  (beziehungsweise  $\leq -1\%$ ) aufweisen, weshalb erwartet werden konnte, dass sich mit steigender Volatilität mehr Datenpunkte in diesem Intervall befinden werden.

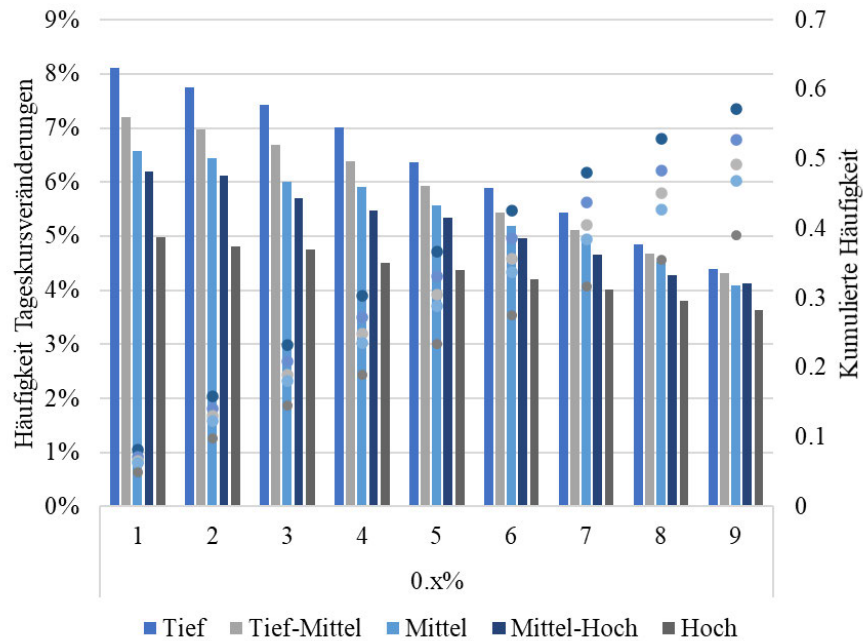


Abbildung 42: Isoliertes Intervall  $0.x\%$  (eigene Darstellung)

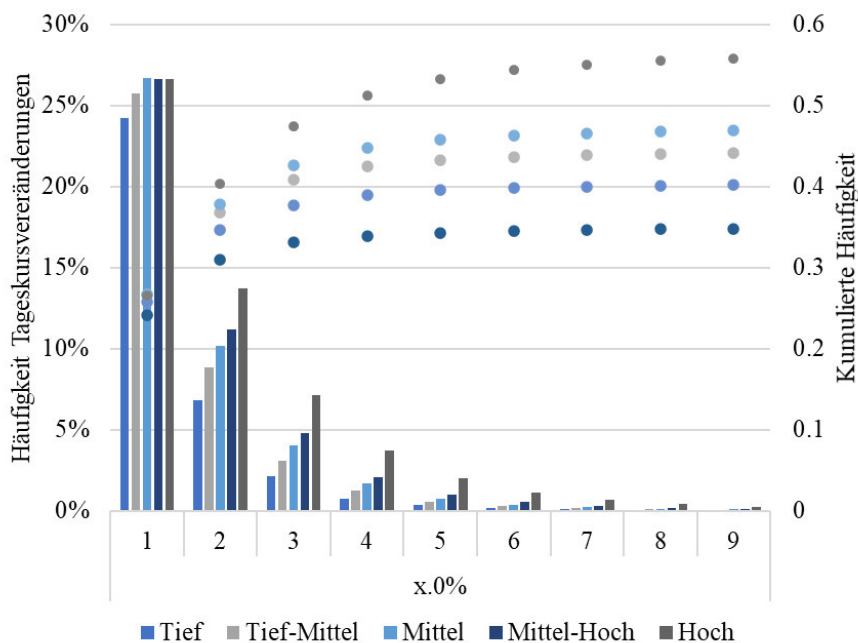


Abbildung 43: Isoliertes Intervall  $x.0\%$  (eigene Darstellung)

Auch im Intervall  $x.0\%$  kann keine Benford-Konformität festgestellt werden, die abnehmende Form der Verteilung ist aber auch hier gegeben. Da die Kursveränderungen der allermeisten Basiswerte unter Einbezug des gesamten Zeitraums Benford-konform sind, sie aber offensichtlich anders über diese Intervalle verteilt sind, stellt sich die Frage, inwiefern Volatilität die Benford-Konformität beeinflusst. Diese Fragestellung soll noch weiter untersucht werden, insbesondere soll überprüft werden, inwiefern die Volatilität eines einzelnen Basiswerts dessen Konformität beeinflusst und wie es sich zwischen Gesamtmarktvolatilität und durchschnittlicher Konformität aller Basiswerte verhält.

In der Zufallsstudie wurde für die Benford-Konformität ein Ranking erstellt, welches die mittlere Benford-Konformität eines Basiswerts über die fünf  $n$  mit jener der anderen Basiswerte vergleicht. Diese Rangliste wird nun herangezogen und jeder Basiswert um dessen 162-wöchige Volatilität ergänzt.

In Abbildung 44 ist festzustellen, dass offenbar kein signifikanter Zusammenhang zwischen der Volatilität eines Basiswerts und dessen Benford-Konformität besteht. Die Verteilung scheint zwar nicht vollständig zufällig, bestimmte Tendenzen sind beobachtbar, der Korrelationskoeffizient über die gesamte Datenreihe liegt bei  $-0.31$ . In Abbildung 44 ist erkennbar, dass Aktien mit (sehr) hoher Volatilität bis auf eine Ausnahme tendenziell niedrige Ränge aufweisen, die hohe Volatilität eine bessere Benford-Approximation à priori also begünstigt (wobei hier abgrenzend zu erwähnen ist, dass die tatsächliche Konformität – also MAD innerhalb Nigrinis Konformitätsgrenzen – nicht mehr

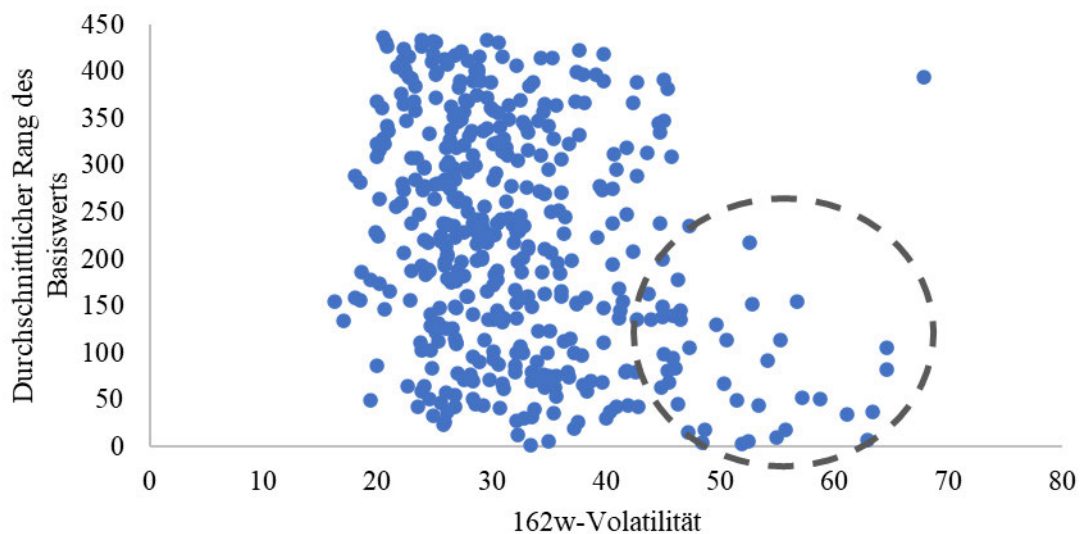


Abbildung 44: Konformitätsränge gegen Volatilität



berücksichtigt wird, sondern nur, wie sich die MAD verhalten). Umgekehrt jedoch kann zumindest in diesem Datensatz anhand des MAD eines Basiswerts nicht auf dessen Volatilität geschlossen werden.

Eine ähnliche Untersuchung soll nun für den Einfluss der Gesamtmarktvolatilität auf die durchschnittliche Konformität der Basiswerte durchgeführt werden. Zu diesem Zweck werden die rollierenden Mittelwerte aus Abschnitt 3.1.3 herangezogen und mit dem jeweiligen Stand des Volatility Index der Chicagoer Börse (VIX), der die implizierte Volatilität des S&P 500 misst, verglichen. Dabei fällt eine interessante Parallele zur Analyse des Einflusses der Volatilität einzelner Basiswerte auf deren Konformität auf: auch im Durchschnitt scheint stark erhöhte Volatilität eine bessere Benford-Approximation zu begünstigen. Allerdings sei auch hier nochmals kritisch erwähnt, dass die rollierenden Mittelwerte aller Basiswerte die tatsächliche Konformitätsgrenze über den gesamten Zeitraum nicht erreichen, also auch zum Zeitpunkt des Volatilitäts-Hochs durchschnittlich keine Konformität zum Benfordschen Gesetz besteht – dafür scheint der einjährige Datensatz schlicht zu kurz zu sein, was auch die Zufallsstudie impliziert. Dennoch kann ausgesagt werden, dass der Einfluss der Gesamtmarktvolatilität bei starken Bewegungen auf die durchschnittlichen MAD Ähnlichkeiten zum Einfluss der Volatilität eines einzelnen Basiswerts auf dessen MAD aufweist.

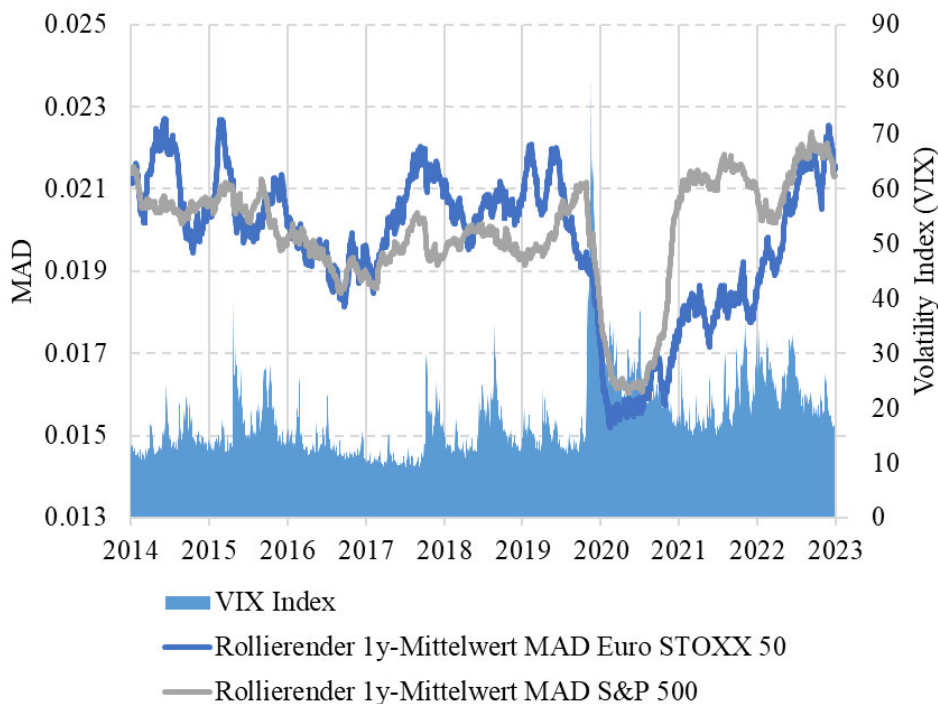


Abbildung 45: Rollierende MAD und VIX (eigene Darstellung)

### 3.1.8 Exkurs: Andere Grössen

Anhand der Konformitätsranglisten soll an dieser Stelle zum Zwecke der finalen Diskussion untersucht werden, ob und inwiefern zwischen Konformität und anderen auf den Basiswert bezogene Grössen Zusammenhänge bestehen. Diese Untersuchung wird mit den Basiswerten des S&P 500 (ohne den Index selbst) durchgeführt. In diesem Abschnitt wird auch überprüft, ob Zusammenhänge zwischen den Konformitätsrängen aus der Zufallsstudie und den durchschnittlichen jährlichen Kursveränderungen der Basiswerte bestehen. Aus zeitlichen Gründen wird jedoch nicht vertieft auf die Resultate eingegangen. Auf Zusammenhängen zur Konformität untersucht wurden die jährliche durchschnittliche Performance beziehungsweise Kursveränderung, das jährliche Durchschnittsvolumen, der EBIT (wo verfügbar) und die Zugehörigkeit zu Sektoren und Industrien.

Keine dieser Grössen weist in dieser Untersuchung eine signifikante Korrelation zum Konformitätsrang des Basiswertes auf.

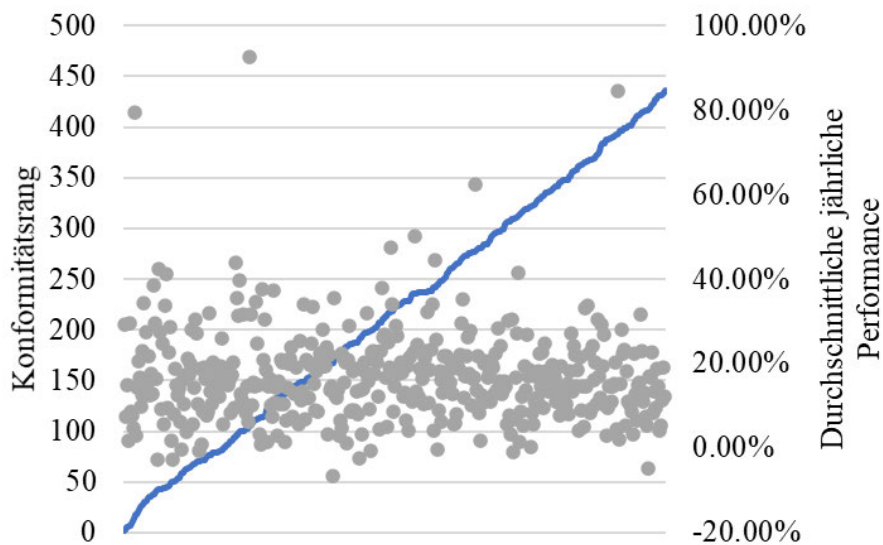


Abbildung 46: Kein Zusammenhang: Konformitätsränge und durchschnittliche jährliche Performance (eigene Darstellung)

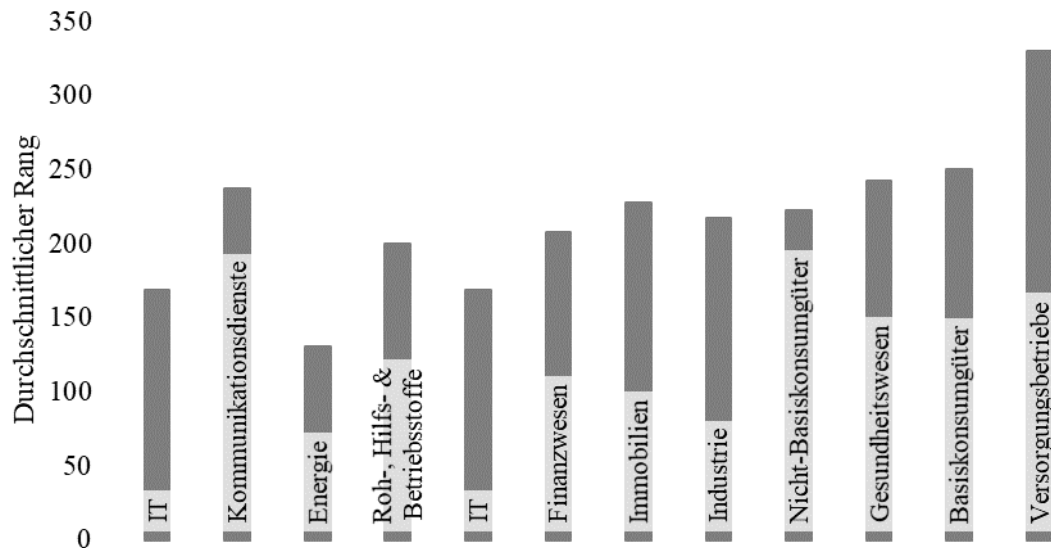


Abbildung 47: Konformitätsränge und Sektoren (eigene Darstellung)

## 4 Diskussion und kritische Würdigung

Wie eingangs der Arbeit erwähnt findet das Benfordsche Gesetz bisher fast ausschließlich in der Betrugserkennung praktische Anwendung, was in Teilen auch die Finanzwelt umschließt, beispielsweise dann, wenn Verdacht auf Bilanzfälschung besteht. Das eröffnet zwar möglicherweise Investitionsoportunitäten (vgl. hierzu beispielsweise *"Designing Shorting Strategies with Benford's Law"* (Keh, 2022)). Analytische, quantitative Untersuchungen zu statistischen Zusammenhängen zwischen Aktien- und Indexpreisen zum Benfordschen Gesetz existieren bisher jedoch nur sehr wenige, generell besteht wenig Forschung in Bezug auf das Benfordsche Gesetz und dessen Anwendungsmöglichkeiten ausserhalb der Betrugserkennung.

Ziel dieser Arbeit war unter anderem die Überprüfung von Aktien- und Indexkursveränderungen hinsichtlich ihrer Fähigkeit, eine Benfordsche Verteilung anzunehmen, was klar bestätigt werden kann. Tägliche Kursveränderungen, zumindest jene der untersuchten Basiswerte, approximieren im Durchschnitt über längere Zeiträume mindestens die Form der Benfordschen Verteilung, oft erreichen sie sogar Konformität, sofern diese mit adäquaten statistischen Tests beurteilt wird.

Insbesondere die Datensatzgrösse übt dabei einen erheblichen Einfluss auf die Approximationsgüte aus. Im Abschnitt zu gleitenden mittleren absoluten Abweichungen konnte

dargelegt werden, dass die Benford-Konformität bei Datensätzen, die anfangs sehr klein sind und dann stetig wachsen, zunächst rapide zunimmt, bevor sie abflacht und sich zu einem bestimmten Zeitpunkt a priori nur noch marginal verändert. Dass die Dynamik der Konformität über die Zeit abnimmt, ist teilweise natürlich dem Messwert geschuldet, je mehr Datenpunkte ein Mittelwert enthält, desto kleiner seine Schwankung durch Hinzufügen eines weiteren Werts. Dennoch weist die ausgeprägte Rechtsschiefe darauf hin, dass die Tageskursveränderungen vieler Aktien und Indizes gegen diese distinkte Verteilungsregel zu streben scheinen. Hier sollte allerdings kritisch angemerkt werden, dass die Art und Weise, wie im Abschnitt zu gleitenden MAD gemessen wurde, wie lange Zeiträume einzelne Aktien und Indizes benötigen, um eine Konformität zu erreichen, möglicherweise zu Verfälschungen führt. Bedingung für Konformität war, dass die MAD der Tageskursveränderungen den kritischen Bereich von 0 bis 0.015 nach Erreichung des Grenzwerts nicht mehr verlassen, ansonsten werden sie nicht als konform gekennzeichnet. Nun ist es denkbar, dass bestimmte MAD über lange Zeiträume unter dieser Konformitätsgrenze lagen und nur wenige Punkte am Ende der Datenreihe wieder darüber. In diesen Fällen würden diese Aktien als "nicht konform" eingestuft, obwohl sie über lange Intervalle möglicherweise sogar eine sehr gute Approximationsgüte aufwiesen. Aufgrund der Tatsache, dass die Ergebnisse aus den gleitenden MAD in erster Linie für die Bestimmung von Stichprobengrößen verwendet wurden, dürften potenzielle Fehler das Gesamtergebnis dieser Arbeit nicht verfälschen. Bevor die Methode jedoch für weitere Untersuchungen verwendet werden kann, sollte dem erwähnten Umstand Rechnung getragen werden.

Der Einfluss der Datensatzgröße auf die Benford-Konformität wurde auch an anderer Stelle demonstriert, insbesondere im Abschnitt zur Zufallsstudie, in welcher innerhalb der Zeitreihe jedes Basiswerts Datensätze unterschiedlicher Größe bestehend aus zufällig gewählten Tageskursveränderungen erstellt wurde. Hier konnte klar gezeigt werden, dass grössere Datensätze durchschnittlich tiefere MAD erzielen.

Eine Erkenntnis dieser Arbeit ist ausserdem, dass bestimmte Aktien und Indizes die Benfordsche Verteilung in diesem Datensatz konsistent besser approximieren. Auch wenn Tageskursveränderungen zufällig gewählt werden, erzielen diese Basiswerte bessere MAD als andere in den gleichen zeitlichen Intervallen, als würde diesen Basiswerten eine Kondition zugrunde liegen, die eine bessere Approximation begünstigt. Allerdings muss

hier berücksichtigt werden, dass die zufälligen Stichproben alle aus dem gleichen Datensatz stammen. Wenn also ein Basiswert über alle  $n$  eine bessere Approximation an das Benfordsche Gesetz aufweist – das bedeutet in dem Fall, dass die Häufigkeiten der einzelnen Ziffern in dessen Datensatz von Grund auf näher an den erwarteten Häufigkeiten liegt – ist zu erwarten, dass dieser Basiswert über ein beliebig grosses  $n$  eine bessere Approximation erreicht. Dieses Problem wurde adressiert, indem für einige Basiswerte der Stichprobenzeitraum verlängert wurde. Hier konnte beobachtet werden, dass, wenn Basiswerte im ersten Datensatz tiefe MAD erreichten, sie das tendenziell auch im vergrößerten Datensatz tun. Allerdings gilt hier bei der Interpretation zu berücksichtigen, dass einerseits auch im verlängerten Zeitraum Daten aus dem ersten Datensatz enthalten sind und andererseits nur eine kleine Anzahl Aktien dahingehend untersucht wurden.

Betrachtet wurden auch die Tageskursveränderungen internationaler Indizes über einen Zeitraum von 23 Jahren. Auch hier konnte im Durchschnitt über alle Datensätze eine Benford-Konformität demonstriert werden, was die These bestärkt, dass Aktien- und Indekurse eine Benfordsche Verteilung annehmen können. Erwähnenswert ist an dieser Stelle, dass die beiden Volatilitätsindizes VIX und V2X beide über keinen Zeitraum eine Konformität erreichten, was Brinkerts Prämisse, dass statistische Werte grundsätzlich nicht Benford-verteilt sind, stützt (2016, S. 24), da diesen beiden Indizes nicht Aktien, sondern eben Volatilität zugrunde liegt.

Bei der Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Benford-Konformität und Volatilität konnte mit einer gewissen Signifikanz festgestellt werden, dass stark erhöhte Volatilität die Approximationsgüte zu begünstigen scheint. Da in diesem Datensatz auf Grundlage von einjährig rollierenden MAD keine Benford-Konformität im Sinne der Konformitätsgrenzen erreicht werden kann, muss die Aussage dahingehend relativiert werden, trotz positiven Einflusses der Volatilität auf die MAD-Scores scheinen einjährige Zeiträume zu wenige Datenpunkte. Dieser Umstand ist auch in den Zufallsstudien erkennbar, in den einjährigen Intervallen erreichen die Tageskursveränderungen die Konformitätsgrenze grundsätzlich nicht.

Untersucht wurde auch der Einfluss der Volatilität auf die tatsächliche Verteilung der Ziffern über verschiedene Grössenordnungen. Hier ergibt sich ein durchaus schlüssiges Bild, mit steigender Volatilität sind die täglichen Kursveränderungen breiter über die

zwei Hauptintervalle  $0. x\%$  und  $x. 0\%$  verteilt. Das war aufgrund der grösseren Schwankungsbreite volatilerer Aktien zu erwarten, dennoch ist es erwähnenswert, dass die Rechtsschiefe der relativen Häufigkeiten auf *beiden* Intervallen mit zunehmender Volatilität abnimmt, die Approximationsgüte aber dennoch tendenziell steigt, was vermutlich auf die absolute Häufigkeit der Ziffern innerhalb der Intervalle zurückzuführen ist. Unter anderem könnte es aber auch daran liegen, dass fehlende "Einsen" sogar noch ein Intervall weiterwandern, also nach  $x0.0\%$ . Dieser Umstand müsste genauer untersucht werden.

Gerade aufgrund des Einflusses der Volatilität ist zu erwähnen, dass die Datensätze die Jahre 2019 und 2020 beinhalten. Insbesondere Anfang 2020 erreichte der Volatilitätsindex der Chicagoer Börse VIX seinen höchsten Stand seit der globalen Finanzkrise, aufgrund seines Ausmasses könnte dieser Extremwert die Konformität für den ganzen Datensatz beeinflusst haben, dies wäre in zukünftigen Untersuchungen zu überprüfen.

## 4.1 Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit konnten keine signifikanten Zusammenhänge zwischen anderen Finanzmarktgrössen und der Benford-Konformität von Tageskursveränderungen festgestellt werden. Das bedeutet aber nicht unbedingt, dass diese nicht existieren (können). Die vorliegende Thesis ist eine der ersten Arbeiten, die sich mit diesem Thema befasst, was die Setzung eines sinnvollen Scopes erschwert. Sie liefert jedoch einige Hinweise, die weiter untersucht werden können.

Erwähnenswert ist an dieser Stelle, dass im Rahmen der iterativen Erarbeitung der Resultate dieser Arbeit auch absolute Preisveränderungen unterschiedlicher Basiswerte betrachtet, jedoch im Hauptteil der nicht weiter erörtert wurden. Es sei erwähnt, dass auf verschiedenen Datensätzen auch absolute Preisveränderungen Benford-Konformität erreichen können, wenn die Intervalle lang genug sind (vgl. Abbildung 52 im Anhang). Zur Demonstration wird der Anhang 1 ("SX5E absolute daily change.xlsb) eingereicht. Für zukünftige Untersuchungen könnte unter Anwendung ähnlicher Vorgehen wie in dieser Arbeit beleuchtet werden, ob vergleichbare Resultate erzielt werden können.

Ebenfalls untersucht wurden die relativen Tageskursveränderungen der 30-tägigen durchschnittlichen Volatilität der Basiswerte. Entgegen Brinkerts Aussage bezüglich statistischer Werte und der Erkenntnis bezüglich Nicht-Konformität des Volatilitätsindizes konnte hier eine erwähnenswert hohe Konformität festgestellt werden (vgl. Abbildung 53), zur Demonstration wird der Anhang 2 ("SX5E 30D Vola relative daily change.xlsb") eingereicht. Beobachtbar ist hier ein scheinbar noch signifikanterer Zusammenhang zwischen Datensatzgrösse und Konformität.

Zukünftige Arbeiten könnten versuchen, den Zusammenhang zwischen Volatilität und Benford-Konformität tiefer zu untersuchen. Beispielsweise wurde in dieser Arbeit gezeigt, dass ein gewisser Zusammenhang zu bestehen scheint, welcher jedoch nicht abschliessend begründet werden konnte. Gezeigt wurde zudem, dass zwischen Volatilität und MAD – zumindest ab einem bestimmten, hohen Volatilitätslevel – eine negative Korrelation besteht, zwischen MAD und der Veränderung der täglichen Kurse (im Sinne von sinkenden oder steigenden Kursen) jedoch keine nennenswerten Zusammenhänge entdeckt wurden. Angesichts der Tatsache, dass der VIX und der S&P 500 signifikant negativ korrelieren, scheint das nicht intuitiv. Dahingehend wären weitere Untersuchungen nötig.

Bezüglich Abhängigkeit der Benford-Konformität zu bestimmten zeitlichen Abschnitten könnte die in dieser Arbeit angewandte Methode bezüglich rollierender MAD weiter ausgearbeitet werden, insbesondere könnten unterschiedlich lange Zeitfenster mehr Erkenntnisse zur Veränderung des MAD über die Zeit liefern.

Um vertieft zu überprüfen, ob bestimmte Basiswerte – wie das einige Resultate dieser Arbeit implizieren – konsistent bessere Benford-Approximationen produzieren, könnte ausserdem der absolute Untersuchungsintervall verlängert und anschliessend in einen Trainings- und einen Testdatensatz unterteilt werden. So könnte überprüft werden, ob die Benford-Konformität von Basiswerten in *Prediction Models* zuverlässig vorhergesagt werden kann.

Generell ist aufgrund des bisher eingeschränkten Forschungsstandes eine Vielzahl weiterer möglicher Untersuchungen zu Zusammenhängen zwischen dem Benfordschen Gesetz und Finanzgrössen denkbar. Auch das "traditionelle" Anwendungsgebiet des

Benfordschen Gesetzes, die Betrugserkennung, könnte in diesem Kontext betrachtet werden. Es könnte beispielsweise untersucht werden, ob, wenn die Richtigkeit einer Bilanz oder Erfolgsrechnung unter Anwendung des Benfordschen Gesetzes zweifelhaft ist, dies sich in einer Form in den Aktien dieser Unternehmen widerspiegelt. Allenfalls könnten Parallelen zwischen Konformität der Bilanz und Konformität der Aktienkurse (oder anderer Grössen dieser Aktien) gezogen werden.

Eine ökonomische Implikation hinsichtlich der Sachlage, dass Aktienkursveränderungen offenbar eine Benfordsche Verteilung annehmen können, ist die Durchführung weiterer Untersuchungen in Bezug auf den Zusammenhang zwischen Konformität und Returns. In dieser Arbeit konnten dahingehend keine nennenswerten Korrelationen festgestellt werden, es wurden hier aber aus zeitlichen Gründen auch keine sonderlich sophistizierten Methoden angewandt (Pearson-Korrelation). Möglicherweise könnten aus anderen Betrachtungswinkeln Resultate erzielt werden, die von ökonomischer Bedeutung sind.

Ebenfalls noch nicht untersucht ist der Zusammenhang zwischen Aktienkonformität und Makroökonomie; es könnte beispielsweise untersucht werden, ob und wie sich die Veränderung des Zinsumfelds, der Inflation, von Arbeitslosendaten oder ähnlichen gesamtwirtschaftlichen Faktoren auf die Konformität der Aktienkurse niederschlägt.

Allgemein könnten statt Aktienkursveränderungen andere quantitative Grössen wie Liquidität, Call- und Put-Ratio, P/E-Ratio, Dividenden, Betas, implizierte Volatilität (etc.) oder Fundamentalgrössen wie Free Cashflow, EBIT, Margen (etc.) im Kontext des Benfordschen Gesetzes betrachtet und auf Zusammenhänge zu anderen Grössen untersucht werden. Weiter könnten ähnliche Untersuchungen auch in gänzlich anderen Assetklassen durchgeführt werden, beispielsweise könnte untersucht werden, wie sich der YTM von Obligationen im Kontext vom Benfordschen Gesetz verhält oder inwiefern der *Fear&Greed-Index* bei Kryptowährungen dieser Verteilung folgt.

An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass sich die Forschung bezüglich Benfordscher Verteilung im Finanzkontext noch in den Anfängen befindet, die Möglichkeiten für weitere Untersuchung also sehr vielfältig sind – mit dieser Arbeit soll ein Schritt zu einem besseren Verständnis des Benfordschen Gesetzes gemacht werden.



## Literaturverzeichnis

- Banks, D. G. (Oktober 2000). Get M.A.D. with the Numbers! *Fraud Magazine*.
- Benford, F. (31. März 1938). The Law of Anomalous Numbers. *Proceedings of the American Philosophical Society*, S. 551-572.
- Berger, A., & Hill, T. (2011). A basic theory of Benford's Law. *Probability Surveys*, S. 1-126.
- Bloomberg-Terminal. (o.J.). Bloomberg L.P.
- Bonettini, N. (2020). *On the use of Benford's Law to detect GAN-generated images*. Politecnico di Milano.
- Brinkert, D. (28. Februar 2016). *Benfords Law: Eine numerische Untersuchung zur Anwendbarkeit statistischer Anpassungstests und praktische Anwendung auf volkswirtschaftliche Zahlen Deutschlands sowie Kfz-Versicherungsschäden*. Ilmenau: Technische Universität Ilmenau.
- Cerqueti, R., & Lupi, C. (2015). *Severe Testing of Benford's Law*.
- Desenne, M. (24. April 2023). *Kiplinger*. Von Stock Market Trading Hours: What Time Is the Stock Market Open Today?: <https://www.kiplinger.com/investing/602886/stock-market-trading-hours> abgerufen
- Goodman, W. (Juni 2016). The promises and pitfalls of Benford's Law. *SIGNIFICANCE*, S. 38-41.
- Hill, T. (März 1995). Base-Invariance implies Benford's Law. *Proceedings of the american mathematical society*, S. 887-895.
- Hill, T. P. (März 1995). Base-Invariance implies Benford's Law. *Proceedings of the american mathematical society*, S. 887-889.
- Humenberger, H. (2008). *Eine elementarmathematische Begründung des Benford-Gesetzes*. Wien.
- Humenberger, H. (2018). In H.-S. Siller, G. Greefrath, & W. Blum, *Realitätsbezüge im Mathematikunterricht* (S. 161-175). Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Hungerbühler, N. (2007). *Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt*. ETH Zürich. Von <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/dual/educeth-dam/documents/Unterrichtsmaterialien/mathematik> abgerufen

- Jayasree, M., Pavana Jyothi, C., & Ramya, P. (2018). Benford's Law and Stock Market - The Implications for Investors: The Evidence from India Nifty Fifty. *Jindal Journal of Business Research*, S. 103-121.
- Keh, S. S. (2022). *Designing Shorting Strategies with Benford's Law*. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology.
- Kossovsky, A. E. (28. Mai 2021). On the Mistaken Use of the Chi-Square Test in Benford's Law. *Stats*, S. 419-453.
- Ley, E. (November 1996). On the Peculiar Distribution of the U.S. Stock Indexes' Digits. *The American Statistician*, S. 311-313.
- Lindgren, P., & Ternqvist, L. (2021). *Financial Applications of Benford's Law - A Mathematical Approach for Analyzing Financial Market Behaviour*. Stockholm: KTH Skolan för Teknikvetenskap.
- Newcomb, S. (1881). Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers. *American Journal of Mathematics*, S. 39-40.
- Nigrini, M. (2012). *Benford's Law, Application for Forensic Accounting, Auditing, and Fraud Detection*. John Wiley & Sons, Inc.
- Pinkham, R. (Dezember 1961). On the Distribution of First Significant Digits. *The Annals of Mathematical Statistics*, S. 1223-1230.
- Savoy, J. (o.J.). *Chi-Square Test*. Von Université de Neuchâtel: <http://members.unine.ch/jacques.savoy/lectures/SemCL/ChiSquareCL.pdf> abgerufen
- Singleton, T. (1. Mai 2011). *ISACA*. Von Understanding and Applying Benford's Law: <https://www.isaca.org/resources/isaca-journal/past-issues/2011/understanding-and-applying-benford's-law> abgerufen
- Tilden, C., & Janes, T. (2015). Empirical Evidence of financial statement manipulation during economic recessions. *Journal of Finance and Accountancy*.

## 5 Anhang

TABLE I  
PERCENTAGE OF TIMES THE NATURAL NUMBERS 1 TO 9 ARE USED AS FIRST  
DIGITS IN NUMBERS, AS DETERMINED BY 20,229 OBSERVATIONS

Group	Title	First Digit									Count
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	
A	Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
B	Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
C	Constants	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
D	Newspapers	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
E	Spec. Heat	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
F	Pressure	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
G	H.P. Lost	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
H	Mol. Wgt.	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
I	Drainage	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
J	Atomic Wgt.	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
K	$n^{-1}, \sqrt{n}, \dots$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
L	Design	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
M	<i>Digest</i>	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
N	Cost Data	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
O	X-Ray Volts	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
P	Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Q	Black Body	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
R	Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
S	$n!, n^2 \dots n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
T	Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
Average . . . . .		30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
Probable Error		$\pm 0.8$	$\pm 0.4$	$\pm 0.4$	$\pm 0.3$	$\pm 0.2$	$\pm 0.2$	$\pm 0.2$	$\pm 0.2$	$\pm 0.3$	—

Abbildung 48: Benfords Untersuchung (Benford, 1953, S.553)

Basiswert	Name	Index	Sektor	Industrie
ABI BB Equity	ANHEUSER-BUSCH INBEV SA/NV	Euro STOXX 50	Basiskonsumgüter	Getränke
AD NA Equity	KONINKLIJKE AHOLD DELHAIZE N	Euro STOXX 50	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
ADS GY Equity	ADIDAS AG	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Textilien & Bekleidung & Luxus
ADYEN NA Equity	ADYEN NV	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
AI FP Equity	AIR LIQUIDE SA	Euro STOXX 50	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
AIR FP Equity	AIRBUS SE	Euro STOXX 50	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
ALV GY Equity	ALLIANZ SE-REG	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Versicherungen
ASML NA Equity	ASML HOLDING NV	Euro STOXX 50	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
BAS GY Equity	BASF SE	Euro STOXX 50	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
BAYN GY Equity	BAYER AG-REG	Euro STOXX 50	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
BBVA SQ Equity	BANCO BILBAO VIZCAYA ARGENTA	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Banken

BMW GY Equity	BAYERISCHE MOTOREN WERKE AG	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Automobilbranche
BN FP Equity	DANONE	Euro STOXX 50	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
BNP FP Equity	BNP PARIBAS	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Banken
CRH ID Equity	CRH PLC	Euro STOXX 50	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Baustoffe
CS FP Equity	AXA SA	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Versicherungen
DBI GY Equity	DEUTSCHE BOERSE AG	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Kapitalmärkte
DG FP Equity	VINCI SA	Euro STOXX 50	Industrie	Bau- & Ingenieurwesen
DPW GY Equity	DEUTSCHE POST AG-REG	Euro STOXX 50	Industrie	Luftfracht & Kuriere
DTE GY Equity	DEUTSCHE TELEKOM AG-REG	Euro STOXX 50	Kommunikationsdienste	Diverse Telekommunikationsdien
EL FP Equity	ESSILORLUXOTTICA	Euro STOXX 50	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
ENEL IM Equity	ENEL SPA	Euro STOXX 50	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
ENI IM Equity	ENI SPA	Euro STOXX 50	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
FLTR ID Equity	FLUTTER ENTERTAINMENT PLC-DI	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
IBE SQ Equity	IBERDROLA SA	Euro STOXX 50	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
IFX GY Equity	INFINEON TECHNOLOGIES AG	Euro STOXX 50	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
INGA NA Equity	ING GROEP NV	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Banken
ISP IM Equity	INTESA SANPAOLO	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Banken
ITX SQ Equity	INDUSTRIA DE DISENO TEXTIL	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
KER FP Equity	KERING	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Textilien & Bekleidung & Luxus
MBG GY Equity	MERCEDES-BENZ GROUP AG	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Automobilbranche
MC FP Equity	LVMH MOET HENNESSY LOUIS VUI	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Textilien & Bekleidung & Luxus
MUV2 GY Equity	MUENCHENER RUECKVER AG-REG	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Versicherungen
NDA FH Equity	NORDEA BANK ABP	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Banken
NOKIA FH Equity	NOKIA OYJ	Euro STOXX 50	IT	Kommunikationsausrüstung
OR FP Equity	L'OREAL	Euro STOXX 50	Basiskonsumgüter	Körperpflegeprodukte
PRX NA Equity	PROSUS NV	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Breit gefächertes Einzelhande
RI FP Equity	PERNOD RICARD SA	Euro STOXX 50	Basiskonsumgüter	Getränke
RMS FP Equity	HERMES INTERNATIONAL	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Textilien & Bekleidung & Luxus
SAF FP Equity	SAFRAN SA	Euro STOXX 50	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung

SAN FP Equity	SANOFI	Euro STOXX 50	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
SAN SQ Equity	BANCO SANTANDER SA	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Banken
SAP GY Equity	SAP SE	Euro STOXX 50	IT	Software
SIE GY Equity	SIEMENS AG-REG	Euro STOXX 50	Industrie	Industriekonglomerate
STLAM IM Equity	STELLANTIS NV	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Automobilbranche
SU FP Equity	SCHNEIDER ELECTRIC SE	Euro STOXX 50	Industrie	Elektrische Geräte
TTE FP Equity	TOTALENERGIES SE	Euro STOXX 50	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
UCG IM Equity	UNICREDIT SPA	Euro STOXX 50	Finanzwesen	Banken
VNA GY Equity	VONOVIA SE	Euro STOXX 50	Immobilien	Immobilienmanagement und -entw
VOW3 GY Equity	VOLKSWAGEN AG-PREF	Euro STOXX 50	Nicht-Basiskonsumgüter	Automobilbranche
A UN Equity	AGILENT TECHNOLOGIES INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
AAL UW Equity	AMERICAN AIRLINES GROUP INC	S&P 500	Industrie	Passagierfluggesellschaften
AAP UN Equity	ADVANCE AUTO PARTS INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
AAPL UW Equity	APPLE INC	S&P 500	IT	Technologie Hardware, Speicher
ABBV UN Equity	ABBVIE INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biotechnologie
ABC UN Equity	AMERISOURCEBERGEN CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
ABT UN Equity	ABBOTT LABORATORIES	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
ACGL UW Equity	ARCH CAPITAL GROUP LTD	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
ACN UN Equity	ACCENTURE PLC-CL A	S&P 500	IT	IT-Dienste
ADBE UW Equity	ADOBE INC	S&P 500	IT	Software
ADI UW Equity	ANALOG DEVICES INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
ADM UN Equity	ARCHER-DANIELS-MIDLAND CO	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
ADP UW Equity	AUTOMATIC DATA PROCESSING	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
ADSK UW Equity	AUTODESK INC	S&P 500	IT	Software
AEE UN Equity	AMEREN CORPORATION	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
AEP UW Equity	AMERICAN ELECTRIC POWER	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
AES UN Equity	AES CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Unabhängige Energie- & Erneue
AFL UN Equity	AFLAC INC	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
AIG UN Equity	AMERICAN INTERNATIONAL GROUP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
AIZ UN Equity	ASSURANT INC	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
AJG UN Equity	ARTHUR J GALLAGHER & CO	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
AKAM UW Equity	AKAMAI TECHNOLOGIES INC	S&P 500	IT	IT-Dienste
ALB UN Equity	ALBEMARLE CORP	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
ALGN UW Equity	ALIGN TECHNOLOGY INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
ALK UN Equity	ALASKA AIR GROUP INC	S&P 500	Industrie	Passagierfluggesellschaften
ALL UN Equity	ALLSTATE CORP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
ALLE UN Equity	ALLEGION PLC	S&P 500	Industrie	Baumaterialien
AMAT UW Equity	APPLIED MATERIALS INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
AMCR UN Equity	AMCOR PLC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Behälter & Verpackung

AMD UN Equity	ADVANCED MICRO DEVICES	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
AME UN Equity	AMETEK INC	S&P 500	Industrie	Elektrische Geräte
AMGN UN Equity	AMGEN INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biotechnologie
AMP UN Equity	AMERIPRISE FINANCIAL INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
AMT UN Equity	AMERICAN TOWER CORP	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
AMZN UN Equity	AMAZON.COM INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Breit gefächert Einzelhandl
ANET UN Equity	ARISTA NETWORKS INC	S&P 500	IT	Kommunikationsausrüstung
ANSS UN Equity	ANSYS INC	S&P 500	IT	Software
AON UN Equity	AON PLC-CLASS A	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
AOS UN Equity	SMITH (A.O.) CORP	S&P 500	Industrie	Baumaterialien
APA UN Equity	APA CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
APD UN Equity	AIR PRODUCTS & CHEMICALS INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
APH UN Equity	AMPHENOL CORP-CL A	S&P 500	IT	Elektronische Geräte, Instrum
APTV UN Equity	APTIV PLC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Kraftfahrzeugkomponenten
ARE UN Equity	ALEXANDRIA REAL ESTATE EQUIT	S&P 500	Immobilien	Bürogebäude (Office REITs)
ATO UN Equity	ATMOS ENERGY CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Gasversorgungsbetriebe
ATVI UN Equity	ACTIVISION BLIZZARD INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Unterhaltung
AVB UN Equity	AVALONBAY COMMUNITIES INC	S&P 500	Immobilien	Wohnimmobilien (Residential-RE
AVGO UN Equity	BROADCOM INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
AVY UN Equity	AVERY DENNISON CORP	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Behälter & Verpackung
AWK UN Equity	AMERICAN WATER WORKS CO INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Wasserversorgungsbetriebe
AXON UN Equity	AXON ENTERPRISE INC	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
AXP UN Equity	AMERICAN EXPRESS CO	S&P 500	Finanzwesen	Private Finanzdienste
AZO UN Equity	AUTOZONE INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
BA UN Equity	BOEING CO/THE	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
BAC UN Equity	BANK OF AMERICA CORP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
BALL UN Equity	BALL CORP	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Behälter & Verpackung
BAX UN Equity	BAXTER INTERNATIONAL INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
BBWI UN Equity	BATH & BODY WORKS INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
BBY UN Equity	BEST BUY CO INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
BDX UN Equity	BECTON DICKINSON AND CO	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
BEN UN Equity	FRANKLIN RESOURCES INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
BF/B UN Equity	BROWN-FORMAN CORP-CLASS B	S&P 500	Basiskonsumgüter	Getränke
BG UN Equity	BUNGE LTD	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
BIIB UN Equity	BIOGEN INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biotechnologie
BIO UN Equity	BIO-RAD LABORATORIES-A	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
BK UN Equity	BANK OF NEW YORK MELLON CORP	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
BKNG UN Equity	BOOKING HOLDINGS INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
BKR UN Equity	BAKER HUGHES CO	S&P 500	Energie	Energiezubehör & -dienste
BLK UN Equity	BLACKROCK INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
BMJ UN Equity	BRISTOL-MYERS SQUIBB CO	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
BR UN Equity	BROADRIDGE FINANCIAL SOLUTIO	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
BRK/B UN Equity	BERKSHIRE HATHAWAY INC-CL B	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen

BRO UN Equity	BROWN & BROWN INC	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
BSX UN Equity	BOSTON SCIENTIFIC CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
BWA UN Equity	BORGWARNER INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Kraftfahrzeugkomponenten
BXP UN Equity	BOSTON PROPERTIES INC	S&P 500	Immobilien	Bürogebäude (Office REITs)
C UN Equity	CITIGROUP INC	S&P 500	Finanzwesen	Banken
CAG UN Equity	CONAGRA BRANDS INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
CAH UN Equity	CARDINAL HEALTH INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtunge
CARR UN Equity	CARRIER GLOBAL CORP	S&P 500	Industrie	Baumaterialien
CAT UN Equity	CATERPILLAR INC	S&P 500	Industrie	Maschinen
CB UN Equity	CHUBB LTD	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
CBOE UF Equity	CBOE GLOBAL MARKETS INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
CBRE UN Equity	CBRE GROUP INC - A	S&P 500	Immobilien	Immobilienmanagement und -entw
CCI UN Equity	CROWN CASTLE INC	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
CCL UN Equity	CARNIVAL CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
CDAY UN Equity	CERIDIAN HCM HOLDING INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
CDNS UW Equity	CADENCE DESIGN SYS INC	S&P 500	IT	Software
CDW UW Equity	CDW CORP/DE	S&P 500	IT	Elektronische Geräte, Instrum
CE UN Equity	CELANESE CORP	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
CEG UW Equity	CONSTELLATION ENERGY	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
CF UN Equity	CF INDUSTRIES HOLDINGS INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
CFG UN Equity	CITIZENS FINANCIAL GROUP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
CHD UN Equity	CHURCH & DWIGHT CO INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Haushaltsartikel
CHRW UW Equity	C.H. ROBINSON WORLDWIDE INC	S&P 500	Industrie	Luftfracht & Kuriere
CHTR UW Equity	CHARTER COMMUNICATIONS INC-A	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
CI UN Equity	THE CIGNA GROUP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtunge
CINF UW Equity	CINCINNATI FINANCIAL CORP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
CL UN Equity	COLGATE-PALMOLIVE CO	S&P 500	Basiskonsumgüter	Haushaltsartikel
CLX UN Equity	CLOROX COMPANY	S&P 500	Basiskonsumgüter	Haushaltsartikel
CMA UN Equity	COMERICA INC	S&P 500	Finanzwesen	Banken
CMCSA UW Equity	COMCAST CORP-CLASS A	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
CME UW Equity	CME GROUP INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
CMG UN Equity	CHIPOTLE MEXICAN GRILL INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
CMI UN Equity	CUMMINS INC	S&P 500	Industrie	Maschinen
CMS UN Equity	CMS ENERGY CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
CNC UN Equity	CENTENE CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtunge
CNP UN Equity	CENTERPOINT ENERGY INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
COF UN Equity	CAPITAL ONE FINANCIAL CORP	S&P 500	Finanzwesen	Private Finanzdienste
COO UN Equity	COOPER COS INC/THE	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
COP UN Equity	CONOCOPHILLIPS	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
COST UW Equity	COSTCO WHOLESALE CORP	S&P 500	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
CPB UN Equity	CAMPBELL SOUP CO	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
CPRT UW Equity	COPART INC	S&P 500	Industrie	Gewerbliche Dienste & Betriebs
CPT UN Equity	CAMDEN PROPERTY TRUST	S&P 500	Immobilien	Wohnimmobilien (Residential-RE

CRL UN Equity	CHARLES RIVER LABORATORIES	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
CRM UN Equity	SALESFORCE INC	S&P 500	IT	Software
CSCO UW Equity	CISCO SYSTEMS INC	S&P 500	IT	Kommunikationsausrüstung
CSGP UW Equity	COSTAR GROUP INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
CSX UW Equity	CSX CORP	S&P 500	Industrie	Bodentransporte
CTAS UW Equity	CINTAS CORP	S&P 500	Industrie	Gewerbliche Dienste & Betriebs
CTLT UN Equity	CATALENT INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
CTRA UN Equity	COTERRA ENERGY INC	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
CTSH UW Equity	COGNIZANT TECH SOLUTIONS-A	S&P 500	IT	IT-Dienste
CTVA UN Equity	CORTEVA INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
CVS UN Equity	CVS HEALTH CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtunge
CVX UN Equity	CHEVRON CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
CZR UW Equity	CAESARS ENTERTAINMENT INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
D UN Equity	DOMINION ENERGY INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
DAL UN Equity	DELTA AIR LINES INC	S&P 500	Industrie	Passagierfluggesellschaften
DD UN Equity	DUPONT DE NEMOURS INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
DE UN Equity	DEERE & CO	S&P 500	Industrie	Maschinen
DFS UN Equity	DISCOVER FINANCIAL SERVICES	S&P 500	Finanzwesen	Private Finanzdienste
DG UN Equity	DOLLAR GENERAL CORP	S&P 500	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
DGX UN Equity	QUEST DIAGNOSTICS INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtunge
DHI UN Equity	DR HORTON INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Gebrauchsgüter
DHR UN Equity	DANAHER CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
DIS UN Equity	WALT DISNEY CO/THE	S&P 500	Kommunikationsdienste	Unterhaltung
DISH UW Equity	DISH NETWORK CORP-A	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
DLR UN Equity	DIGITAL REALTY TRUST INC	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
DLTR UW Equity	DOLLAR TREE INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
DOV UN Equity	DOVER CORP	S&P 500	Industrie	Maschinen
DOW UN Equity	DOW INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
DPZ UN Equity	DOMINO'S PIZZA INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
DRI UN Equity	DARDEN RESTAURANTS INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
DTE UN Equity	DTE ENERGY COMPANY	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
DUK UN Equity	DUKE ENERGY CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
DVA UN Equity	DAVITA INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtunge
DVN UN Equity	DEVON ENERGY CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
DXC UN Equity	DXC TECHNOLOGY CO	S&P 500	IT	IT-Dienste
DXCM UW Equity	DEXCOM INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
EA UW Equity	ELECTRONIC ARTS INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Unterhaltung
EBAY UW Equity	EBAY INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Breit gefächertes Einzelhande
ECL UN Equity	ECOLAB INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
ED UN Equity	CONSOLIDATED EDISON INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
EFX UN Equity	EQUIFAX INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
EIX UN Equity	EDISON INTERNATIONAL	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
EL UN Equity	ESTEE LAUDER COMPANIES-CL A	S&P 500	Basiskonsumgüter	Körperpflegeprodukte



ELV UN Equity	ELEVANCE HEALTH INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
EMN UN Equity	EASTMAN CHEMICAL CO	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
EMR UN Equity	EMERSON ELECTRIC CO	S&P 500	Industrie	Elektrische Geräte
ENPH UQ Equity	ENPHASE ENERGY INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
EOG UN Equity	EOG RESOURCES INC	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
EPAM UN Equity	EPAM SYSTEMS INC	S&P 500	IT	IT-Dienste
EQIX UW Equity	EQUINIX INC	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
EQR UN Equity	EQUITY RESIDENTIAL	S&P 500	Immobilien	Wohnimmobilien (Residential-RE
EQT UN Equity	EQT CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
ES UN Equity	EVERSOURCE ENERGY	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
ESS UN Equity	ESSEX PROPERTY TRUST INC	S&P 500	Immobilien	Wohnimmobilien (Residential-RE
ETN UN Equity	EATON CORP PLC	S&P 500	Industrie	Elektrische Geräte
ETR UN Equity	ENTERGY CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
ETSY UW Equity	ETSY INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Breit gefächelter Einzelhande
EVRG UW Equity	EVERGY INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
EW UN Equity	EDWARDS LIFESCIENCES CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
EXC UW Equity	EXELON CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
EXPD UW Equity	EXPEDITORS INTL WASH INC	S&P 500	Industrie	Luftfracht & Kuriere
EXPE UW Equity	EXPEDIA GROUP INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
EXR UN Equity	EXTRA SPACE STORAGE INC	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
F UN Equity	FORD MOTOR CO	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Automobilbranche
FANG UW Equity	DIAMONDBACK ENERGY INC	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
FAST UW Equity	FASTENAL CO	S&P 500	Industrie	Handels- & Vertriebsunternehme
FCX UN Equity	FREEPORT-MCMORAN INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Metalle & Bergbau
FDS UN Equity	FACTSET RESEARCH SYSTEMS INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
FDX UN Equity	FEDEX CORP	S&P 500	Industrie	Luftfracht & Kuriere
FE UN Equity	FIRSTENERGY CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
FFIV UW Equity	F5 INC	S&P 500	IT	Kommunikationsausrüstung
FICO UN Equity	FAIR ISAAC CORP	S&P 500	IT	Software
FIS UN Equity	FIDELITY NATIONAL INFO SERV	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
FISV UW Equity	FISERV INC	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
FITB UW Equity	FIFTH THIRD BANCORP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
FLT UN Equity	FLEETCOR TECHNOLOGIES INC	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
FMC UN Equity	FMC CORP	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
FOX UW Equity	FOX CORP - CLASS B	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
FOXA UW Equity	FOX CORP - CLASS A	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
FRT UN Equity	FEDERAL REALTY INVS TRUST	S&P 500	Immobilien	Einzelhandel (Retail REITs)
FSLR UW Equity	FIRST SOLAR INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
FTNT UW Equity	FORTINET INC	S&P 500	IT	Software
FTV UN Equity	FORTIVE CORP	S&P 500	Industrie	Maschinen
GD UN Equity	GENERAL DYNAMICS CORP	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
GE UN Equity	GENERAL ELECTRIC CO	S&P 500	Industrie	Industriekonglomerate
GEHC UW Equity	GE HEALTHCARE TECHNOLOGY	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung

GEN UW Equity	GEN DIGITAL INC	S&P 500	IT	Software
GILD UW Equity	GILEAD SCIENCES INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biotechnologie
GIS UN Equity	GENERAL MILLS INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
GL UN Equity	GLOBE LIFE INC	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
GLW UN Equity	CORNING INC	S&P 500	IT	Elektronische Geräte, Instrum
GM UN Equity	GENERAL MOTORS CO	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Automobilbranche
GNRC UN Equity	GENERAC HOLDINGS INC	S&P 500	Industrie	Elektrische Geräte
GOOG UW Equity	ALPHABET INC-CL C	S&P 500	Kommunikationsdienste	Interaktive Medien & Dienste
GOOGL UW Equity	ALPHABET INC-CL A	S&P 500	Kommunikationsdienste	Interaktive Medien & Dienste
GPC UN Equity	GENUINE PARTS CO	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Vertriebsunternehmen
GPN UN Equity	GLOBAL PAYMENTS INC	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
GRMN UN Equity	GARMIN LTD	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Gebrauchsgüter
GS UN Equity	GOLDMAN SACHS GROUP INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
GWV UN Equity	WW GRAINGER INC	S&P 500	Industrie	Handels- & Vertriebsunternehme
HAL UN Equity	HALLIBURTON CO	S&P 500	Energie	Energiezubehör & -dienste
HAS UW Equity	HASBRO INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Freizeitartikel
HBAN UW Equity	HUNTINGTON BANCSHARES INC	S&P 500	Finanzwesen	Banken
HCA UN Equity	HCA HEALTHCARE INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
HD UN Equity	HOME DEPOT INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
HES UN Equity	HESS CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
HIG UN Equity	HARTFORD FINANCIAL SVCS GRP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
HII UN Equity	HUNTINGTON INGALLS INDUSTRIE	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
HLT UN Equity	HILTON WORLDWIDE HOLDINGS IN	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
HOLX UW Equity	HOLOGIC INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
HON UW Equity	HONEYWELL INTERNATIONAL INC	S&P 500	Industrie	Industriekonglomerate
HPE UN Equity	HEWLETT PACKARD ENTERPRISE	S&P 500	IT	Technologie Hardware, Speicher
HPQ UN Equity	HP INC	S&P 500	IT	Technologie Hardware, Speicher
HRL UN Equity	HORMEL FOODS CORP	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
HSIC UW Equity	HENRY SCHEIN INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
HST UW Equity	HOST HOTELS & RESORTS INC	S&P 500	Immobilien	Hotels und Urlaubsanlagen (Hot
HSY UN Equity	HERSHEY CO/THE	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
HUM UN Equity	HUMANA INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
HWM UN Equity	HOWMET AEROSPACE INC	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
IBM UN Equity	INTL BUSINESS MACHINES CORP	S&P 500	IT	IT-Dienste
ICE UN Equity	INTERCONTINENTAL EXCHANGE IN	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
IDXX UW Equity	IDEXX LABORATORIES INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
IEX UN Equity	IDEX CORP	S&P 500	Industrie	Maschinen
IFF UN Equity	INTL FLAVORS & FRAGRANCES	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
ILMN UW Equity	ILLUMINA INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
INCY UW Equity	INCYTE CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Biotechnologie
INTC UW Equity	INTEL CORP	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
INTU UW Equity	INTUIT INC	S&P 500	IT	Software
INVH UN Equity	INVITATION HOMES INC	S&P 500	Immobilien	Wohnimmobilien (Residential-RE

IP UN Equity	INTERNATIONAL PAPER CO	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Behälter & Verpackung
IPG UN Equity	INTERPUBLIC GROUP OF COS INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
IQV UN Equity	IQVIA HOLDINGS INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
IR UN Equity	INGERSOLL-RAND INC	S&P 500	Industrie	Maschinen
IRM UN Equity	IRON MOUNTAIN INC	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
ISRG UW Equity	INTUITIVE SURGICAL INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
IT UN Equity	GARTNER INC	S&P 500	IT	IT-Dienste
ITW UN Equity	ILLINOIS TOOL WORKS	S&P 500	Industrie	Maschinen
IVZ UN Equity	INVESCO LTD	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
J UN Equity	JACOBS SOLUTIONS INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
JBHT UW Equity	HUNT (JB) TRANSPRT SVCS INC	S&P 500	Industrie	Bodentransporte
JCI UN Equity	JOHNSON CONTROLS INTERNATION	S&P 500	Industrie	Baumaterialien
JKHY UW Equity	JACK HENRY & ASSOCIATES INC	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
JNJ UN Equity	JOHNSON & JOHNSON	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
JNPR UN Equity	JUNIPER NETWORKS INC	S&P 500	IT	Kommunikationsausrüstung
JPM UN Equity	JPMORGAN CHASE & CO	S&P 500	Finanzwesen	Banken
K UN Equity	KELLOGG CO	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
KDP UW Equity	KEURIG DR PEPPER INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Getränke
KEY UN Equity	KEYCORP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
KEYS UN Equity	KEYSIGHT TECHNOLOGIES IN	S&P 500	IT	Elektronische Geräte, Instrum
KHC UW Equity	KRAFT HEINZ CO/THE	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
KIM UN Equity	KIMCO REALTY CORP	S&P 500	Immobilien	Einzelhandel (Retail REITs)
KLAC UW Equity	KLA CORP	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
KMB UN Equity	KIMBERLY-CLARK CORP	S&P 500	Basiskonsumgüter	Haushaltsartikel
KMI UN Equity	KINDER MORGAN INC	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
KMX UN Equity	CARMAX INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
KO UN Equity	COCA-COLA CO/THE	S&P 500	Basiskonsumgüter	Getränke
KR UN Equity	KROGER CO	S&P 500	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
L UN Equity	LOEWS CORP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
LDOS UN Equity	LEIDOS HOLDINGS INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
LEN UN Equity	LENNAR CORP-A	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Gebrauchsgüter
LH UN Equity	LABORATORY CRP OF AMER HLDGS	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
LHX UN Equity	L3HARRIS TECHNOLOGIES INC	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
LIN UN Equity	LINDE PLC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
LKQ UW Equity	LKQ CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Vertriebsunternehmen
LLY UN Equity	ELI LILLY & CO	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
LMT UN Equity	LOCKHEED MARTIN CORP	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
LNC UN Equity	LINCOLN NATIONAL CORP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
LNT UW Equity	ALLIANT ENERGY CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
LOW UN Equity	LOWE'S COS INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
LRCX UW Equity	LAM RESEARCH CORP	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
LUV UN Equity	SOUTHWEST AIRLINES CO	S&P 500	Industrie	Passagierfluggesellschaften
LVS UN Equity	LAS VEGAS SANDS CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit

LW UN Equity	LAMB WESTON HOLDINGS INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
LYB UN Equity	LYONDELLBASELL INDU-CL A	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
LYV UN Equity	LIVE NATION ENTERTAINMENT IN	S&P 500	Kommunikationsdienste	Unterhaltung
MA UN Equity	MASTERCARD INC - A	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
MAA UN Equity	MID-AMERICA APARTMENT COMM	S&P 500	Immobilien	Wohnimmobilien (Residential-RE)
MAR UW Equity	MARRIOTT INTERNATIONAL -CL A	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
MAS UN Equity	MASCO CORP	S&P 500	Industrie	Baumaterialien
MCD UN Equity	MCDONALD'S CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
MCHP UW Equity	MICROCHIP TECHNOLOGY INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
MCK UN Equity	MCKESSON CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
MCO UN Equity	MOODY'S CORP	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
MDLZ UW Equity	MONDELEZ INTERNATIONAL INC-A	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
MDT UN Equity	MEDTRONIC PLC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
MET UN Equity	METLIFE INC	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
META UW Equity	META PLATFORMS INC-CLASS A	S&P 500	Kommunikationsdienste	Interaktive Medien & Dienste
MGM UN Equity	MGM RESORTS INTERNATIONAL	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
MHK UN Equity	MOHAWK INDUSTRIES INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Gebrauchsgüter
MKC UN Equity	MCCORMICK & CO-NON VTG SHRS	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
MKTX UW Equity	MARKETAXESS HOLDINGS INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
MLM UN Equity	MARTIN MARIETTA MATERIALS	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Baustoffe
MMC UN Equity	MARSH & MCLENNAN COS	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
MMM UN Equity	3M CO	S&P 500	Industrie	Industriekonglomerate
MNST UW Equity	MONSTER BEVERAGE CORP	S&P 500	Basiskonsumgüter	Getränke
MO UN Equity	ALTRIA GROUP INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Tabak
MOH UN Equity	MOLINA HEALTHCARE INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
MOS UN Equity	MOSAIC CO/THE	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
MPC UN Equity	MARATHON PETROLEUM CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
MPWR UW Equity	MONOLITHIC POWER SYSTEMS INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
MRK UN Equity	MERCK & CO. INC.	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
MRNA UW Equity	MODERNA INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biotechnologie
MRO UN Equity	MARATHON OIL CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
MS UN Equity	MORGAN STANLEY	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
MSCI UN Equity	MSCI INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
MSFT UW Equity	MICROSOFT CORP	S&P 500	IT	Software
MSI UN Equity	MOTOROLA SOLUTIONS INC	S&P 500	IT	Kommunikationsausrüstung
MTB UN Equity	M & T BANK CORP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
MTCH UW Equity	MATCH GROUP INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Interaktive Medien & Dienste
MTD UN Equity	METTLER-TOLEDO INTERNATIONAL	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
MU UW Equity	MICRON TECHNOLOGY INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
NCLH UN Equity	NORWEGIAN CRUISE LINE HOLDIN	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
NDAQ UW Equity	NASDAQ INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
NDSN UW Equity	NORDSON CORP	S&P 500	Industrie	Maschinen
NEE UN Equity	NEXTERA ENERGY INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe

NEM UN Equity	NEWMONT CORP	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Metalle & Bergbau
NFLX UW Equity	NETFLIX INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Unterhaltung
NI UN Equity	NISOURCE INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
NKE UN Equity	NIKE INC -CL B	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Textilien & Bekleidung & Luxus
NOC UN Equity	NORTHROP GRUMMAN CORP	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
NOW UN Equity	SERVICENOW INC	S&P 500	IT	Software
NRG UN Equity	NRG ENERGY INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
NSC UN Equity	NORFOLK SOUTHERN CORP	S&P 500	Industrie	Bodentransporte
NTAP UW Equity	NETAPP INC	S&P 500	IT	Technologie Hardware, Speicher
NTRS UW Equity	NORTHERN TRUST CORP	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
NUE UN Equity	NUCOR CORP	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Metalle & Bergbau
NVDA UW Equity	NVIDIA CORP	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
NVR UN Equity	NVR INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Gebrauchsgüter
NWL UW Equity	NEWELL BRANDS INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Gebrauchsgüter
NWS UW Equity	NEWS CORP - CLASS B	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
NWSA UW Equity	NEWS CORP - CLASS A	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
NXPI UW Equity	NXP SEMICONDUCTORS NV	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
O UN Equity	REALTY INCOME CORP	S&P 500	Immobilien	Einzelhandel (Retail REITs)
ODFL UW Equity	OLD DOMINION FREIGHT LINE	S&P 500	Industrie	Bodentransporte
OGN UN Equity	ORGANON & CO	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
OKE UN Equity	ONEOK INC	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
OMC UN Equity	OMNICOM GROUP	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
ON UW Equity	ON SEMICONDUCTOR	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
ORCL UN Equity	ORACLE CORP	S&P 500	IT	Software
ORLY UW Equity	O'REILLY AUTOMOTIVE INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
OTIS UN Equity	OTIS WORLDWIDE CORP	S&P 500	Industrie	Maschinen
OXY UN Equity	OCCIDENTAL PETROLEUM CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
PARA UW Equity	PARAMOUNT GLOBAL-CLASS B	S&P 500	Kommunikationsdienste	Medien
PAYC UN Equity	PAYCOM SOFTWARE INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
PAYX UW Equity	PAYCHEX INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
PCAR UW Equity	PACCAR INC	S&P 500	Industrie	Maschinen
PCG UN Equity	P G & E CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
PEAK UN Equity	HEALTHPEAK PROPERTIES INC	S&P 500	Immobilien	REITs im Gesundheitswesen
PEG UN Equity	PUBLIC SERVICE ENTERPRISE GP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
PEP UW Equity	PEPSICO INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Getränke
PFE UN Equity	PFIZER INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
PFG UW Equity	PRINCIPAL FINANCIAL GROUP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
PG UN Equity	PROCTER & GAMBLE CO/THE	S&P 500	Basiskonsumgüter	Haushaltsartikel
PGR UN Equity	PROGRESSIVE CORP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
PH UN Equity	PARKER HANNIFIN CORP	S&P 500	Industrie	Maschinen
PHM UN Equity	PULTEGROUP INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Gebrauchsgüter
PKG UN Equity	PACKAGING CORP OF AMERICA	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Behälter & Verpackung
PLD UN Equity	PROLOGIS INC	S&P 500	Immobilien	Industrie-REITs

PM UN Equity	PHILIP MORRIS INTERNATIONAL	S&P 500	Basiskonsumgüter	Tabak
PNC UN Equity	PNC FINANCIAL SERVICES GROUP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
PNR UN Equity	PENTAIR PLC	S&P 500	Industrie	Maschinen
PNW UN Equity	PINNACLE WEST CAPITAL	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
PODD UW Equity	INSULET CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
POOL UW Equity	POOL CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Vertriebsunternehmen
PPG UN Equity	PPG INDUSTRIES INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
PPL UN Equity	PPL CORP	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
PRU UN Equity	PRUDENTIAL FINANCIAL INC	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
PSA UN Equity	PUBLIC STORAGE	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
PSX UN Equity	PHILLIPS 66	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
PTC UW Equity	PTC INC	S&P 500	IT	Software
PWR UN Equity	QUANTA SERVICES INC	S&P 500	Industrie	Bau- & Ingenieurwesen
PXD UN Equity	PIONEER NATURAL RESOURCES CO	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
PYPL UW Equity	PAYPAL HOLDINGS INC	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
QCOM UW Equity	QUALCOMM INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
QRVO UW Equity	QORVO INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
RCL UN Equity	ROYAL CARIBBEAN CRUISES LTD	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
RE UN Equity	EVEREST RE GROUP LTD	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
REG UW Equity	REGENCY CENTERS CORP	S&P 500	Immobilien	Einzelhandel (Retail REITs)
REGN UW Equity	REGENERON PHARMACEUTICALS	S&P 500	Gesundheitswesen	Biotechnologie
RF UN Equity	REGIONS FINANCIAL CORP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
RHI UN Equity	ROBERT HALF INTL INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
RJF UN Equity	RAYMOND JAMES FINANCIAL INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
RL UN Equity	RALPH LAUREN CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Textilien & Bekleidung & Luxus
RMD UN Equity	RESMED INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
ROK UN Equity	ROCKWELL AUTOMATION INC	S&P 500	Industrie	Elektrische Geräte
ROL UN Equity	ROLLINS INC	S&P 500	Industrie	Gewerbliche Dienste & Betriebs
ROP UN Equity	ROPER TECHNOLOGIES INC	S&P 500	IT	Software
ROST UW Equity	ROSS STORES INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
RSG UN Equity	REPUBLIC SERVICES INC	S&P 500	Industrie	Gewerbliche Dienste & Betriebs
RTX UN Equity	RAYTHEON TECHNOLOGIES CORP	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
RVTY UN Equity	REVVITY INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
SBAC UW Equity	SBA COMMUNICATIONS CORP	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
SBUX UW Equity	STARBUCKS CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
SCHW UN Equity	SCHWAB (CHARLES) CORP	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
SEDG UW Equity	SOLAREDGE TECHNOLOGIES INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
SEE UN Equity	SEALED AIR CORP	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Behälter & Verpackung
SHW UN Equity	SHERWIN-WILLIAMS CO/THE	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Chemikalien
SJM UN Equity	JM SMUCKER CO/THE	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
SLB UN Equity	SCHLUMBERGER LTD	S&P 500	Energie	Energiezubehör & -dienste
SNA UN Equity	SNAP-ON INC	S&P 500	Industrie	Maschinen
SNPS UW Equity	SYNOPSIS INC	S&P 500	IT	Software

SO UN Equity	SOUTHERN CO/THE	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
SPG UN Equity	SIMON PROPERTY GROUP INC	S&P 500	Immobilien	Einzelhandel (Retail REITs)
SPGI UN Equity	S&P GLOBAL INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
SRE UN Equity	SEMPRA ENERGY	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
STE UN Equity	STERIS PLC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
STLD UW Equity	STEEL DYNAMICS INC	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Metalle & Bergbau
STT UN Equity	STATE STREET CORP	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
STX UW Equity	SEAGATE TECHNOLOGY HOLDINGS	S&P 500	IT	Technologie Hardware, Speicher
STZ UN Equity	CONSTELLATION BRANDS INC-A	S&P 500	Basiskonsumgüter	Getränke
SWK UN Equity	STANLEY BLACK & DECKER INC	S&P 500	Industrie	Maschinen
SWKS UW Equity	SKYWORKS SOLUTIONS INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
SYF UN Equity	SYNCHRONY FINANCIAL	S&P 500	Finanzwesen	Private Finanzdienste
SYK UN Equity	STRYKER CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
YYY UN Equity	SYSCO CORP	S&P 500	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
T UN Equity	AT&T INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Diverse Telekommunikationsdien
TAP UN Equity	MOLSON COORS BEVERAGE CO - B	S&P 500	Basiskonsumgüter	Getränke
TDG UN Equity	TRANSDIGM GROUP INC	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
TDY UN Equity	TELEDYNE TECHNOLOGIES INC	S&P 500	IT	Elektronische Geräte, Instrum
TECH UW Equity	BIO-TECHNE CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
TEL UN Equity	TE CONNECTIVITY LTD	S&P 500	IT	Elektronische Geräte, Instrum
TER UW Equity	TERADYNE INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
TFC UN Equity	TRUIST FINANCIAL CORP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
TFX UN Equity	TELEFLEX INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
TGT UN Equity	TARGET CORP	S&P 500	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
TJX UN Equity	TJX COMPANIES INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
TMO UN Equity	THERMO FISHER SCIENTIFIC INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
TMUS UW Equity	T-MOBILE US INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Drahtlose Telekommunikationsdi
TPR UN Equity	TAPESTRY INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Textilien & Bekleidung & Luxus
TRGP UN Equity	TARGA RESOURCES CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
TRMB UW Equity	TRIMBLE INC	S&P 500	IT	Elektronische Geräte, Instrum
TROW UW Equity	T ROWE PRICE GROUP INC	S&P 500	Finanzwesen	Kapitalmärkte
TRV UN Equity	TRAVELERS COS INC/THE	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
TSCO UW Equity	TRACTOR SUPPLY COMPANY	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
TSLA UW Equity	TESLA INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Automobilbranche
TSN UN Equity	TYSON FOODS INC-CL A	S&P 500	Basiskonsumgüter	Nahrungsmittel
TT UN Equity	TRANE TECHNOLOGIES PLC	S&P 500	Industrie	Baumaterialien
TTWO UW Equity	TAKE-TWO INTERACTIVE SOFTWRE	S&P 500	Kommunikationsdienste	Unterhaltung
TXN UW Equity	TEXAS INSTRUMENTS INC	S&P 500	IT	Halbleiter & Geräte zur Halbl
TXT UN Equity	TEXTRON INC	S&P 500	Industrie	Luftfahrt & Verteidigung
TYL UN Equity	TYLER TECHNOLOGIES INC	S&P 500	IT	Software
UAL UW Equity	UNITED AIRLINES HOLDINGS INC	S&P 500	Industrie	Passagierfluggesellschaften
UDR UN Equity	UDR INC	S&P 500	Immobilien	Wohnimmobilien (Residential-RE
UHS UN Equity	UNIVERSAL HEALTH SERVICES-B	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtunge

ULTA UN Equity	ULTA BEAUTY INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Einzelhandel: Spezial
UNH UN Equity	UNITEDHEALTH GROUP INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Einrichtung
UNP UN Equity	UNION PACIFIC CORP	S&P 500	Industrie	Bodentransporte
UPS UN Equity	UNITED PARCEL SERVICE-CL B	S&P 500	Industrie	Luftfracht & Kuriere
URI UN Equity	UNITED RENTALS INC	S&P 500	Industrie	Handels- & Vertriebsunternehme
USB UN Equity	US BANCORP	S&P 500	Finanzwesen	Banken
V UN Equity	VISA INC-CLASS A SHARES	S&P 500	Finanzwesen	Finanzdienstleistungen
VFC UN Equity	VF CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Textilien & Bekleidung & Luxus
VICI UN Equity	VICI PROPERTIES INC	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
VLO UN Equity	VALERO ENERGY CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
VMC UN Equity	VULCAN MATERIALS CO	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Baustoffe
VRSK UN Equity	VERISK ANALYTICS INC	S&P 500	Industrie	Professionelle Dienste
VRSN UN Equity	VERISIGN INC	S&P 500	IT	IT-Dienste
VRTX UN Equity	VERTEX PHARMACEUTICALS INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Biotechnologie
VTR UN Equity	VENTAS INC	S&P 500	Immobilien	REITs im Gesundheitswesen
VTRS UN Equity	VIATRIS INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
VZ UN Equity	VERIZON COMMUNICATIONS INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Diverse Telekommunikationsdien
WAB UN Equity	WABTEC CORP	S&P 500	Industrie	Maschinen
WAT UN Equity	WATERS CORP	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
WBA UN Equity	WALGREENS BOOTS ALLIANCE INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
WBD UN Equity	WARNER BROS DISCOVERY INC	S&P 500	Kommunikationsdienste	Unterhaltung
WDC UN Equity	WESTERN DIGITAL CORP	S&P 500	IT	Technologie Hardware, Speicher
WEC UN Equity	WEC ENERGY GROUP INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Multi-Versorger
WELL UN Equity	WELLTOWER INC	S&P 500	Immobilien	REITs im Gesundheitswesen
WFC UN Equity	WELLS FARGO & CO	S&P 500	Finanzwesen	Banken
WHR UN Equity	WHIRLPOOL CORP	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Gebrauchsgüter
WM UN Equity	WASTE MANAGEMENT INC	S&P 500	Industrie	Gewerbliche Dienste & Betriebs
WMB UN Equity	WILLIAMS COS INC	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
WMT UN Equity	WALMART INC	S&P 500	Basiskonsumgüter	Vertrieb und Einzelhandel von
WRB UN Equity	WR BERKLEY CORP	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
WRK UN Equity	WESTROCK CO	S&P 500	Roh-, Hilfs- & Betriebsstoffe	Behälter & Verpackung
WST UN Equity	WEST PHARMACEUTICAL SERVICES	S&P 500	Gesundheitswesen	Biowissenschaften Hilfsmittel
WTW UN Equity	WILLIS TOWERS WATSON PLC	S&P 500	Finanzwesen	Versicherungen
WY UN Equity	WEYERHAEUSER CO	S&P 500	Immobilien	Spezialisierte REITs
WYNN UN Equity	WYNN RESORTS LTD	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
XEL UN Equity	XCEL ENERGY INC	S&P 500	Versorgungsbetriebe	Stromversorgungsbetriebe
XOM UN Equity	EXXON MOBIL CORP	S&P 500	Energie	Erdöl, Erdgas & nicht erneuer
XRAY UN Equity	DENTSPLY SIRONA INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
XYL UN Equity	XYLEM INC	S&P 500	Industrie	Maschinen
YUM UN Equity	YUM! BRANDS INC	S&P 500	Nicht-Basiskonsumgüter	Hotels, Restaurants & Freizeit
ZBH UN Equity	ZIMMER BIOMET HOLDINGS INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Gesundheitswesen: Ausstattung
ZBRA UN Equity	ZEBRA TECHNOLOGIES CORP-CL A	S&P 500	IT	Elektronische Geräte, Instrum
ZION UN Equity	ZIONS BANCORP NA	S&P 500	Finanzwesen	Banken



ZTS UN Equity	ZOETIS INC	S&P 500	Gesundheitswesen	Pharmazeutika
---------------	------------	---------	------------------	---------------

Basiswert	Name	Land/Region
SPX Index	S&P 500 INDEX	USA
NDX Index	NASDAQ 100 STOCK INDX	USA
INDU Index	DOW JONES INDUS. AVG	USA
SX5E Index	Euro STOXX 50 Pr	Europa
SMI Index	SWISS MARKET INDEX	Schweiz
DAX Index	DAX INDEX	Deutschland
HSI Index	HANG SENG INDEX	Hong Kong
NIFTY Index	Nifty 50	Indien
IBOV Index	BRAZIL IBOVESPA INDEX	Brasilien
MDAX Index	MDAX PERF INDEX	Deutschland
SPI Index	SPI SWISS PERFORMANCE IX	Schweiz
CAC Index	CAC 40 INDEX	Frankreich
UKX Index	FTSE 100 INDEX	Grossbritannien
XU100 Index	BIST 100 INDEX	Türkei
VIX Index	Cboe Volatility Index	USA
V2X Index	VSTOXX Index	Europa

Tabelle 8: Basiswerte für empirische Untersuchung (eigene Darstellung)

	10y	5y	5y	3y	3y	3y	1y	1y	1y	1y	1y	1y	1y	1y	1y	1y	
	01.05.2013	01.05.2013	01.05.2018	01.05.2013	01.05.2016	02.05.2019	01.05.2013	02.05.2014	03.05.2015	03.05.2016	04.05.2017	05.05.2018	06.05.2019	06.05.2020	07.05.2021	08.05.2022	
SX5E Index	0.011	0.011	0.012	0.015	0.010	0.012	0.025	0.026	0.012	0.017	0.027	0.016	0.012	0.018	0.020	0.021	
ABI BB Equity	0.011	0.013	0.011	0.015	0.015	0.013	0.027	0.014	0.023	0.027	0.019	0.012	0.020	0.008	0.029	0.018	
AD NA Equity	0.013	0.011	0.017	0.010	0.016	0.014	0.018	0.020	0.018	0.015	0.031	0.021	0.011	0.022	0.021	0.024	
ADS GY Equity	0.015	0.014	0.017	0.016	0.016	0.019	0.020	0.018	0.017	0.020	0.012	0.024	0.020	0.021	0.019	0.016	
ADYEN NA Equity	0.011		0.011		0.017	0.013						0.017	0.015	0.023	0.011	0.015	
AI FP Equity	0.013	0.015	0.011	0.015	0.018	0.007	0.010	0.029	0.028	0.020	0.020	0.028	0.017	0.015	0.015	0.018	
AIR FP Equity	0.013	0.014	0.013	0.012	0.020	0.013	0.026	0.007	0.013	0.023	0.017	0.025	0.020	0.014	0.025	0.018	
ALV GY Equity	0.008	0.006	0.011	0.011	0.012	0.012	0.018	0.012	0.022	0.019	0.017	0.017	0.020	0.015	0.014	0.022	
ASML NA Equity	0.011	0.011	0.012	0.016	0.013	0.015	0.024	0.022	0.018	0.014	0.016	0.010	0.008	0.018	0.024	0.019	
BAS GY Equity	0.009	0.009	0.014	0.011	0.012	0.010	0.012	0.013	0.018	0.014	0.022	0.020	0.022	0.016	0.016	0.030	
BAYN GY Equity	0.010	0.012	0.012	0.016	0.012	0.014	0.015	0.018	0.027	0.008	0.026	0.016	0.011	0.013	0.021	0.017	
BBVA SQ Equity	0.014	0.016	0.013	0.016	0.019	0.016	0.030	0.018	0.010	0.015	0.026	0.021	0.018	0.017	0.024	0.012	
BMW GY Equity	0.010	0.011	0.013	0.016	0.013	0.011	0.025	0.024	0.018	0.012	0.020	0.025	0.017	0.010	0.016	0.020	
BN FP Equity	0.012	0.015	0.011	0.020	0.018	0.006	0.023	0.015	0.030	0.019	0.022	0.029	0.016	0.014	0.019	0.023	
BNP FP Equity	0.014	0.018	0.011	0.020	0.017	0.007	0.033	0.023	0.019	0.025	0.024	0.016	0.019	0.014	0.012	0.029	
CRH ID Equity	0.015	0.016	0.014	0.015	0.018	0.014	0.019	0.015	0.019	0.024	0.028	0.020	0.016	0.022	0.016	0.023	
CS FP Equity	0.014	0.017	0.013	0.018	0.016	0.011	0.029	0.027	0.016	0.019	0.021	0.018	0.018	0.013	0.017	0.025	
DB1 GY Equity	0.014	0.013	0.017	0.014	0.024	0.013	0.018	0.021	0.022	0.019	0.024	0.032	0.013	0.021	0.022	0.025	
DG FP Equity	0.010	0.010	0.012	0.015	0.011	0.013	0.022	0.017	0.024	0.017	0.007	0.019	0.016	0.024	0.015	0.023	
DPW GY Equity	0.012	0.014	0.013	0.018	0.012	0.009	0.021	0.021	0.019	0.014	0.016	0.016	0.013	0.015	0.019	0.027	
DTE GY Equity	0.006	0.008	0.007	0.017	0.017	0.008	0.022	0.024	0.014	0.022	0.014	0.025	0.019	0.017	0.022	0.015	
EL FP Equity	0.012	0.011	0.013	0.016	0.013	0.016	0.014	0.014	0.035	0.014	0.023	0.010	0.018	0.030	0.020	0.025	
ENEL IM Equity	0.013	0.018	0.014	0.021	0.013	0.020	0.030	0.019	0.021	0.018	0.023	0.019	0.018	0.026	0.024	0.019	
ENI IM Equity	0.012	0.013	0.013	0.008	0.017	0.011	0.017	0.012	0.016	0.026	0.028	0.018	0.020	0.012	0.016	0.018	
FLTR ID Equity	0.012	0.016	0.014	0.019	0.011	0.013	0.023	0.034	0.011	0.024	0.016	0.019	0.030	0.013	0.023	0.024	
IBE SQ Equity	0.011	0.014	0.012	0.014	0.012	0.010	0.016	0.020	0.021	0.013	0.028	0.016	0.012	0.019	0.020	0.031	
IFX GY Equity	0.012	0.016	0.012	0.019	0.012	0.012	0.028	0.026	0.023	0.020	0.010	0.022	0.014	0.018	0.010	0.019	
INGA NA Equity	0.012	0.015	0.011	0.017	0.012	0.009	0.023	0.021	0.021	0.021	0.015	0.015	0.019	0.014	0.010	0.022	
ISP IM Equity	0.011	0.011	0.013	0.015	0.011	0.015	0.015	0.022	0.019	0.019	0.022	0.012	0.018	0.018	0.022	0.015	
ITX SQ Equity	0.012	0.015	0.013	0.017	0.020	0.010	0.023	0.016	0.017	0.021	0.024	0.029	0.016	0.021	0.019	0.017	
KER FP Equity	0.013	0.015	0.016	0.017	0.012	0.016	0.021	0.023	0.014	0.024	0.019	0.016	0.025	0.021	0.019	0.021	
MBG GY Equity	0.008	0.008	0.010	0.012	0.010	0.008	0.019	0.016	0.022	0.019	0.017	0.015	0.021	0.011	0.009	0.014	
MC FP Equity	0.012	0.011	0.015	0.008	0.019	0.012	0.015	0.024	0.020	0.017	0.017	0.028	0.014	0.011	0.026	0.022	
MUV2 GY Equity	0.012	0.012	0.016	0.014	0.013	0.013	0.024	0.014	0.022	0.019	0.017	0.023	0.018	0.020	0.017	0.023	
NDA FH Equity	0.014	0.020	0.012	0.017	0.019	0.013	0.024	0.028	0.022	0.025	0.029	0.015	0.020	0.016	0.012	0.015	
NOKIA FH Equity	0.013	0.018	0.012	0.022	0.018	0.012	0.018	0.023	0.031	0.023	0.022	0.015	0.009	0.030	0.018	0.016	
OR FP Equity	0.010	0.011	0.014	0.014	0.017	0.014	0.026	0.023	0.025	0.009	0.020	0.029	0.014	0.022	0.024	0.025	
PRX NA Equity	0.008		0.008			0.009								0.021	0.021	0.011	0.009
RI FP Equity	0.011	0.014	0.009	0.009	0.020	0.010	0.010	0.022	0.014	0.033	0.022	0.019	0.021	0.018	0.017	0.021	
RMS FP Equity	0.010	0.012	0.011	0.011	0.018	0.010	0.023	0.017	0.017	0.016	0.022	0.025	0.013	0.014	0.016	0.013	
SAF FP Equity	0.010	0.013	0.011	0.016	0.011	0.013	0.027	0.015	0.023	0.026	0.019	0.011	0.019	0.013	0.026	0.020	
SAN FP Equity	0.016	0.014	0.022	0.016	0.019	0.019	0.025	0.024	0.022	0.019	0.025	0.025	0.021	0.027	0.026	0.036	
SAN SQ Equity	0.014	0.013	0.017	0.015	0.019	0.015	0.029	0.021	0.021	0.024	0.024	0.031	0.012	0.019	0.023	0.026	
SAP GY Equity	0.014	0.013	0.017	0.018	0.011	0.016	0.021	0.026	0.014	0.008	0.025	0.020	0.013	0.014	0.031	0.025	
SIE GY Equity	0.016	0.018	0.016	0.017	0.027	0.010	0.019	0.024	0.024	0.021	0.031	0.041	0.018	0.019	0.015	0.029	
STLAM IM Equity	0.009	0.009	0.010	0.011	0.010	0.010		0.019	0.015	0.012	0.014	0.015	0.023	0.021	0.006	0.014	
SU FP Equity	0.015	0.016	0.017	0.017	0.019	0.015	0.015	0.031	0.024	0.018	0.025	0.026	0.013	0.023	0.017	0.022	
TTE FP Equity	0.013	0.013	0.014	0.019	0.015	0.014	0.029	0.024	0.020	0.029	0.017	0.021	0.016	0.023	0.018	0.020	
UCG IM Equity	0.014	0.012	0.015	0.014	0.015	0.012	0.017	0.026	0.013	0.017	0.023	0.025	0.017	0.022	0.014	0.026	
VNA GY Equity	0.009	0.013	0.009	0.011	0.017	0.011	0.020	0.009	0.023	0.011	0.026	0.023	0.012	0.014	0.022	0.013	
VOW3 GY Equity	0.013	0.013	0.013	0.016	0.019	0.012	0.018	0.021	0.026	0.028	0.018	0.019	0.017	0.016	0.015	0.013	

Abbildung 49: Konformitätsmatrix Euro STOXX (für S&P 500 siehe Excel 1 relative rolling MAD)

(eigene Darstellung)

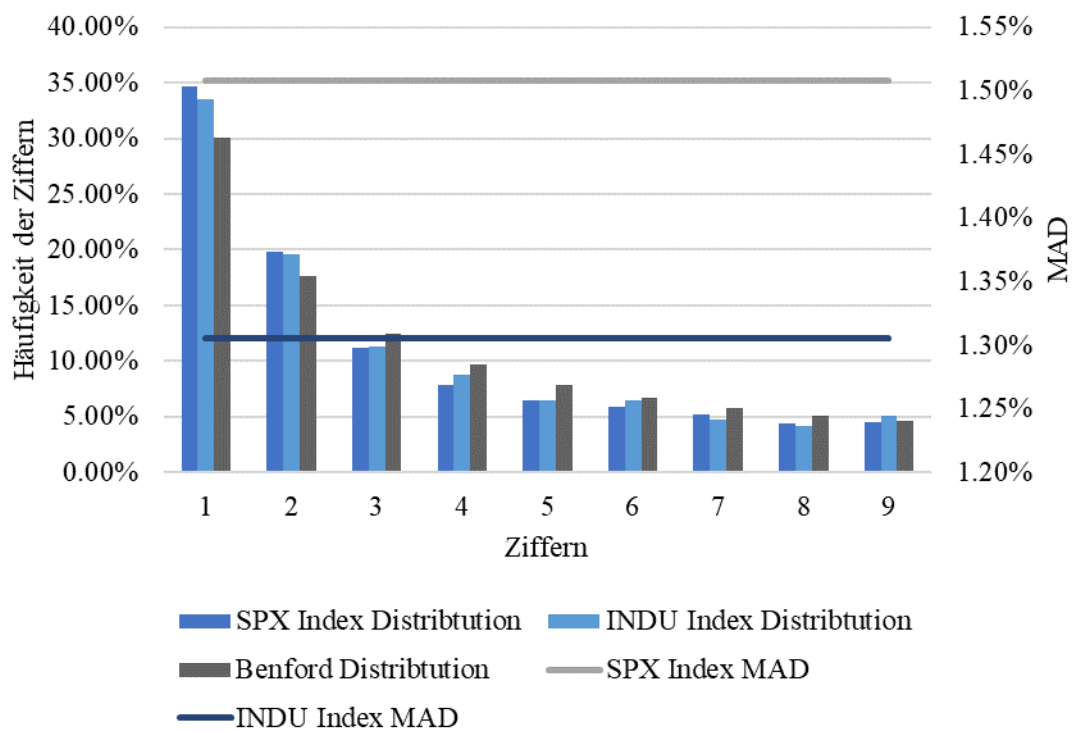


Abbildung 50: Konformität und Verteilung der Ziffern, wöchentliche Daten (eigene Darstellung)

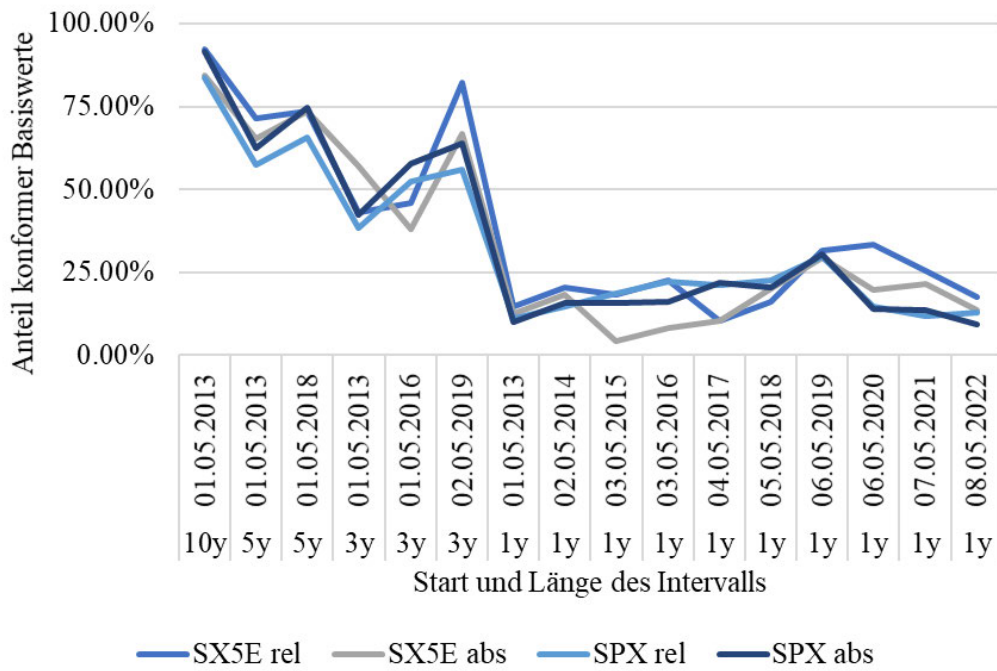


Abbildung 51: Anteil konformer relativer und absoluter Tageskursveränderungen (eigene Darstellung)

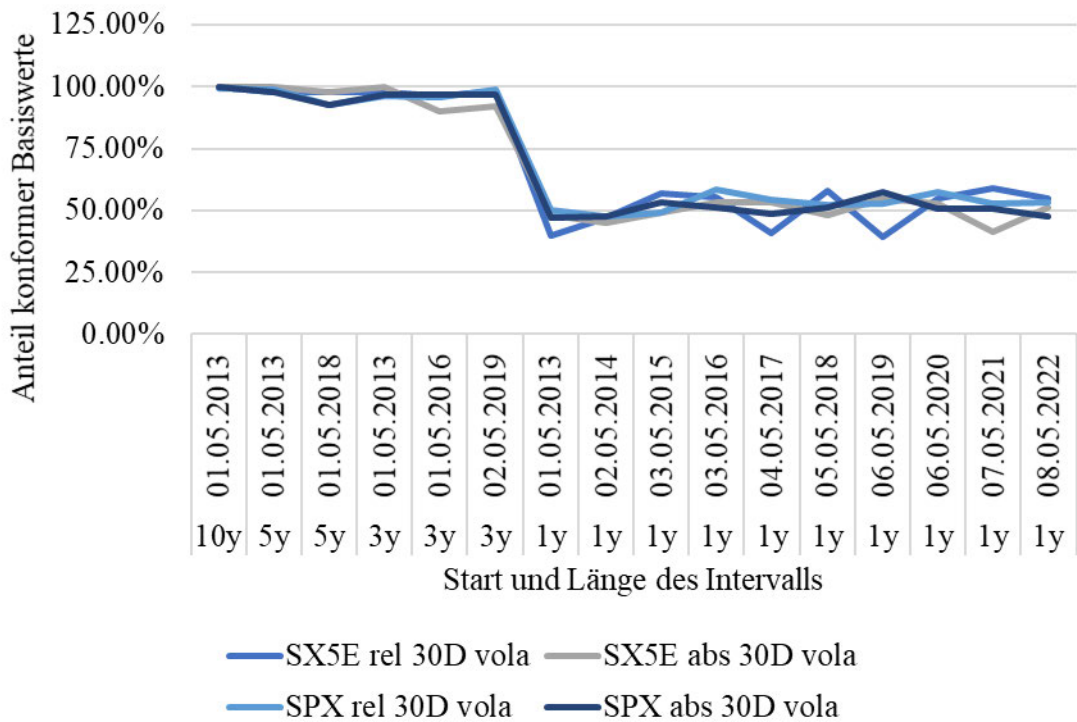


Abbildung 52: Anteil konformer Tageskursveränderungen der 30-tägigen Volatilität (eigene Darstellung)